

Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 66–2012

**Strömungsinduzierter
Körperschalleintrag in Strukturen mit
porösen Oberflächen**

von

Silja Christina Beck

Institut für Angewandte Mechanik

Technische Universität Braunschweig

Herausgegeben vom Mechanik-Zentrum der
Technischen Universität Braunschweig

Schriftleiter: Prof. Dr. rer. nat. H. Antes

Institut für Angewandte Mechanik
Postfach 3329
38023 Braunschweig

Tel.: 0531 / 391-7101
Fax: 0531 / 391-5843

Von der Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
zur Erlangung des Grades einer Doktoringenieurin (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Eingereicht am 19. Januar 2012
Disputation am 10. Mai 2012

Berichterstatter:
Prof. Dr.-Ing. S. Langer
Prof. Dr.-Ing. J. Delfs

©Copyright 2012 S. C. Beck, Braunschweig

BSM 66–2012
ISBN 978–3–920395–65–4

Alle Rechte, insbesondere der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu vervielfältigen.

Zusammenfassung

Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 880 “Grundlagen des Hochauftriebs künftiger Verkehrsflugzeuge” ist ein Teilbereich der Untersuchung von akustischen Grundlagen und Lärm-minderungspotentialen am Flugzeug gewidmet. Neben dem Umströmungsgeräusch selbst wird unter anderem der Einfluss der Strömung auf die Struktur untersucht. Strömungsinduzierter Körperschall kann sich in einem Bauteil ausbreiten und seinerseits zu weiterer Schallabstrahlung führen. Eine Möglichkeit zur Reduzierung des Körperschalleintrags stellt das Aufbringen einer poroelastischen Schicht auf das Bauteil dar, die durch ihre dissipierenden Eigenschaften schwingungsreduzierende Wirkung hat.

In dieser Arbeit wird ein Berechnungsmodell vorgestellt, das den strömungsinduzierten Schalleintrag in ein Bauteil, dessen Weiterleitung und gegebenenfalls resultierende Schallabstrahlung abbildet. Von besonderer Bedeutung sind dabei die Interaktionen zwischen den Komponenten Strömung, poroelastisches Material, elastische Struktur und akustisches Fluid. Ihre entsprechende Formulierung ermöglicht die Verwendung verschiedener Simulationsverfahren für die unterschiedlichen Komponenten, so dass die Vorteile des jeweiligen Verfahrens ausgenutzt werden können.

Einen Schwerpunkt der Arbeit bildet die Aufstellung der Interaktionsbedingungen für die Kopplung von Strömung und poroelastischem Material. Neben Studien zu der formulierten und implementierten Kopplung werden anhand einiger Beispiele die Einsatzmöglichkeiten und die Wirksamkeit von poroelastischen Materialien zur Reduzierung von strömungsinduziertem Schalleintrag aufgezeigt.

Abstract

Within the Collaboratory Research Centre *Sonderforschungsbereich 880* “Fundamentals of High Lift for Future Civil Aircraft” part of the work scope is dedicated to acoustic fundamentals and noise reduction potentials for aircraft. Apart from investigation on sound generated aerodynamically the flow’s impact on the structure is being examined. Flow-induced structural sound propagates within a structure and can lead to further sound radiation. An approach to reduce the immission of flow-induced structural sound consists in the application of a poroelastic layer which causes decreased structural vibrations due to its damping properties.

In this work a computational model is presented to account for (a) flow-induced sound immission into a structure, (b) the sound’s propagation, and (c) possible resulting sound radiation. The interactions between the components flow, poroelastic material, elastic structure, and acoustic fluid are of special interest. Consistent formulation of these interactions allows for the application of different simulation techniques for each component, such as to make full use of each method’s advantages.

A key aspect of this work is the formulation of the interface conditions to couple a flow with a poroelastic material. The proposed and implemented coupling conditions are studied. The given examples show possible areas of application and effectiveness of poroelastic material for reducing flow-induced sound immission.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Stand der Forschung	3
1.1.1	Abbildung der Teilsysteme	4
1.1.2	Berücksichtigung der Interaktionen	6
1.2	Ziele	10
2	Modellbildung	12
2.1	Strömung	13
2.1.1	Navier-Stokes-Gleichungen	15
2.1.2	Turbulenzmodelle	17
2.2	Struktur	18
2.3	Akustisches Fluid	20
2.4	Poröses Material	23
2.4.1	Äquivalenter Fluid-Ansatz	23
2.4.2	Poroelastische Materialien	24
3	Simulation	29
3.1	Finite-Volumen-Methode (FVM)	29
3.1.1	Räumliche Diskretisierung	30
3.1.2	Zeitliche Diskretisierung	31
3.1.3	Schwache Form und Aufstellung des Gleichungssystems	33
3.2	Finite-Element-Methode (FEM)	34
3.2.1	FEM für Biegeschwingungen einer Mindlin-Platte	34
3.2.2	FEM für in-plane-Schwingungen einer Scheibe	36
3.2.3	Kombination zum Schalenelement	37
3.2.4	FEM für poroelastisches Material	38
3.3	Randelementemethode (BEM)	40
3.3.1	Randintegralgleichung für die Wellenausbreitung im akustischen Fluid	40
3.3.2	Randelementegleichung	42
4	Interaktion	45
4.1	Interaktion Struktur – Fluid	46
4.1.1	Interaktion Struktur – akustisches Fluid	46

4.1.2	Interaktion Strömung – Struktur	48
4.2	Interaktionen mit poroelastischem Material	49
4.2.1	Interaktion poroelastisches Material – Struktur	50
4.2.2	Interaktion poroelastisches Material – akustisches Fluid	52
4.3	Interaktion poroelastisches Material – Strömung	53
4.3.1	Kopplungsbedingungen Strömung – poroelastisches Material	55
4.3.2	Numerische Umsetzung	58
5	Plausibilitätsstudien	64
5.1	Wirkung einer poroelastischen Schicht	64
5.2	Diskretisierung von poroelastischem Material	68
5.3	Vergleich der Kopplungsbedingungen auf Basis der Druckkomponente	71
5.4	Einfluss des tangentialen Kopplungsparameters	74
5.5	Diskussion	79
6	Beispiele mit Anwendungsbezug	81
6.1	Bereitstellung von Strömungsdaten	81
6.2	Strömungsinduzierte vibroakustische Schallabstrahlung	84
6.2.1	Überströmte Platte ohne poroelastisches Material	87
6.2.2	Überströmte Platte mit poroelastischer Schicht	90
6.3	Strömungsinduzierter Körperschall	93
6.3.1	Überströmte Struktur ohne poroelastische Schicht	94
6.3.2	Überströmte Struktur mit poroelastischer Schicht	96
6.4	Nachbildung einer poroelastischen Hinterkante	99
6.4.1	Überströmte Hinterkante aus Aluminiumblechen	99
6.4.2	Überströmte Hinterkante aus poroelastischem Material	102
7	Zusammenfassung und Ausblick	107
A	Parameter der Biot-Formulierung	109
B	Verzeichnis der verwendeten Symbole und Abkürzungen	110
	Literaturverzeichnis	113

1 Einleitung

Geräusche sind ständige Begleiter im Alltag. Sie können als angenehm empfunden werden oder als störend. Im letzteren Fall spricht man von Lärm. Lärm tritt in einer Vielzahl von Varianten auf: zu den bekanntesten zählen Verkehrslärm, Gewerbelärm, Freizeitlärm und Nachbarschaftslärm. Dass Lärm neben einem als unangenehm empfundenen akustischen Eindruck auch gesundheitliche Beeinträchtigungen mit sich bringen kann, ist heute hinlänglich bekannt [56].

Die Kenntnisse dieser gesundheitsgefährdenden Einflüsse haben den Gesetzgeber sowohl in Deutschland als auch in der Europäischen Union veranlasst, Gesetze und Richtlinien bezüglich des sogenannten “unerwünschten Schalls” zu erlassen beziehungsweise umzusetzen. In Deutschland ist dies durch das Bundes-Immissionsschutzgesetz (BImSchG) und die zugehörigen Bundes-Immissionsschutzverordnungen (BImSchV) geregelt. Weitere Regulative ergeben sich aus dem Arbeitsschutzgesetz und der Lärm- und Vibrations-Arbeitsschutzverordnung.

Die zulässigen Immissionswerte in der Umgebung von Flughäfen werden in Deutschland durch das Gesetz zum Schutz gegen Fluglärm (FluLärmG) festgelegt. Bestimmungen zur Schallabstrahlung von Zivilflugzeugen ergeben sich aus dem Anhang 16 (Band I) des Abkommens über die internationale Zivilluftfahrt, wobei seit dem ersten Inkrafttreten die Richtlinien kontinuierlich verschärft worden sind.

Diese gesetzlichen Grenzwerte stellen lediglich Mindestanforderungen dar. Unter Berücksichtigung des zunehmenden Wunschs in der Gesellschaft nach einem lärmarmen und ruhigen Umfeld sowie der prognostizierten Zunahmen im Flug- und Straßenverkehr bemühen sich Forschung und Industrie um innovative Maßnahmen zur Schallreduzierung.

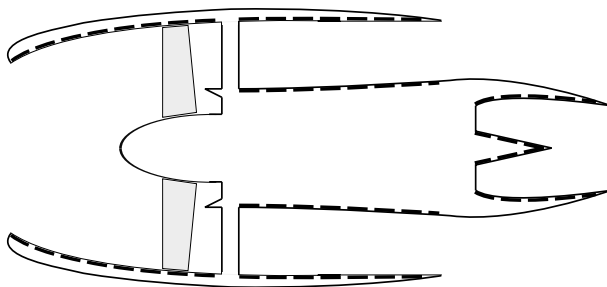
Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 880 “Grundlagen des Hochauftriebs künftiger Verkehrsflugzeuge” wird die Entwicklung lärmarmen effizienter Antriebssysteme vorangetrieben. Die Untersuchungen beinhalten sowohl die Betrachtung von Lärmreduzierungspotentialen direkt am Triebwerk, als auch die Beeinflussung des Umströmungslärms. In beiden Fällen kann der Einsatz von porösen Materialien positive Effekte aufweisen:

- Akustische Auskleidungen in den Strömungskanälen eines Triebwerks (siehe Abbildung 1.1(a)) machen sich die absorbierenden Eigenschaften von porösen Materialien zunutze. Aufgrund der vielfachen Schallreflexionen innerhalb der Strömungskanäle wird ein Teil der Schallenergie bereits im Triebwerk dissipiert [26]. Die hohen Beständigkeitsanforderungen an die verbauten Materialien beeinflussen dabei maßgeblich die Wahl der porösen Materialien.

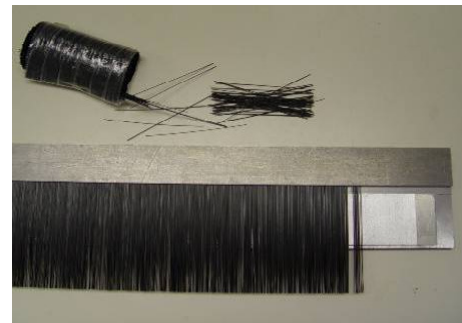
Das Prinzip, poröse Materialien zur Schallabsorption einzusetzen, ist ebenfalls aus der Raumakustik bekannt. Poröse Absorber (zum Beispiel als Wand- oder Deckenabsorber)

wirken unter anderem auf den Gesamtschallpegel eines Raumes und können, richtig eingesetzt, erheblich zur Verbesserung der Sprachverständlichkeit beitragen.

- Deutliche Minderungen des Strömungsgeräuschs werden durch porös oder geschlitzt gestaltete Hinterkanten erzielt [73], beispielsweise in Form von Bürsten (siehe Abbildung 1.1(b)). Diesem Effekt wird auch der lautlose Flug von Eulen zugeschrieben, allerdings sind die zugrunde liegenden physikalischen Vorgänge noch nicht umfassend verstanden.



(a) Mögliche Anordnung von akustischen Auskleidungen in einem Triebwerk (nach [26])



(b) Für einen Modellversuch mit Bürsten präparierte Hinterkante (Photo mit freundlicher Genehmigung von M. Herr, DLR Braunschweig)

Abbildung 1.1: Verwendung von porösen Materialien zur Schallreduzierung am Flugzeug

Die vorgenannten Beispiele basieren auf der Absorptionswirkung poröser Materialien. Die porösen Medien interagieren mit der an sie angrenzenden Luft beziehungsweise Luftströmung und beeinflussen die Schallerzeugung beziehungsweise -ausbreitung in eben dieser.

Ein weiteres charakteristisches Merkmal poröser Materialien ist ihre dämpfende Eigenschaft. Ein poröses Material besteht im Allgemeinen aus einer Fluid- und einer Festkörperphase, deren Zusammenspiel bei bestimmter Materialbeschaffenheit zu Energiedissipation im Material und somit zu struktureller Dämpfung führt. Die Ausnutzung dieser Eigenschaft stellt eine weitere Einsatzmöglichkeit von porösem Material dar: Strukturelle Schwingungen lassen sich reduzieren, beispielsweise indem Bauteile mit porösem Material kombiniert werden. Ein Beispiel dafür sind poröse Absorber in raumluft- beziehungsweise prozesslufttechnischen Anlagen [61], die zum einen einen Teil der Schallenergie innerhalb der Raumlufteinlage dissipieren und andererseits den Körperschalleintrag in die Kanalwände und die damit verbundene Schallabstrahlung nach außen reduzieren können.

Im Kontext des Sonderforschungsbereichs 880 stellt sich somit nicht nur die Frage, wie ein überströmtes poröses Material die Aeroakustik beeinflusst, sondern auch, wie die Strukturantwort eines Bauteils unter Verwendung von porösem Material ausfällt. Diese Fragestellung gewinnt besondere Relevanz, wenn eine Weiterleitung des Körperschalls zum Beispiel bis in den Flugzeugrumpf erfolgt oder das Bauteil seinerseits aufgrund der Strukturschwingungen Schall abstrahlt. Abbildung 1.2 verdeutlicht schematisch den Zusammenhang von Strömung, Struktur und Schallabstrahlung und zeigt den möglichen Einsatz von porösem Material auf.

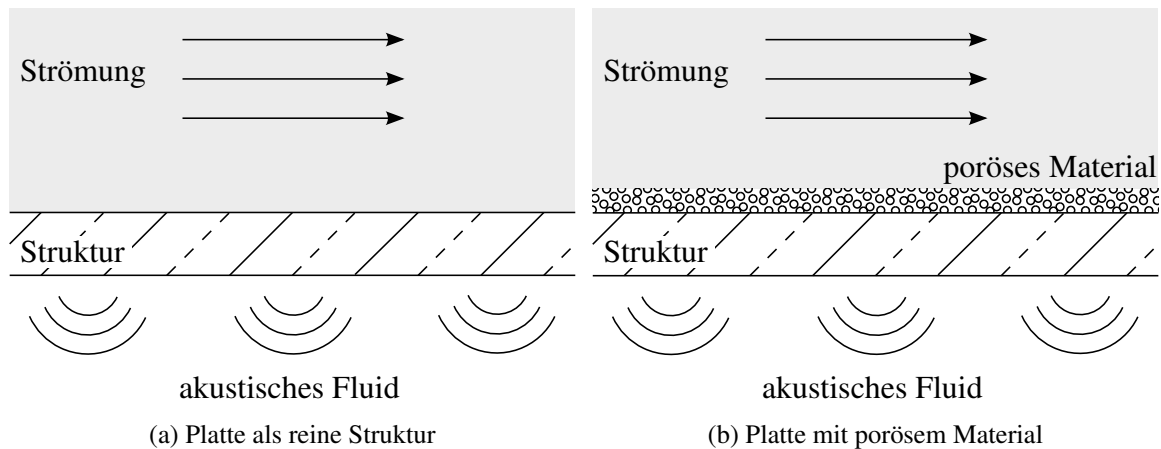


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung: strömungsinduzierte Anregung einer flexiblen Platte und resultierende Schallabstrahlung

Lässt sich die aus der Strömung resultierende Körperschalleinleitung in die Struktur durch das Aufbringen eines porösen Materials reduzieren, so kann eine Minderung sowohl des durch die Struktur übertragenen Körperschalls als auch der Schallabstrahlung der Struktur angenommen werden. Auf den Anwendungsfall des Flugzeugs bezogen kann dieses letztendlich eine Reduzierung des Schallpegels in der Kabine bewirken.

Im Rahmen von Entwicklungs- und Entwurfsprozessen ist eine Abschätzung der zu erwartenden Schallemissionen wünschenswert. Rechnerische Analysen mit einfachen Methoden existieren weder für die strömungsinduzierte Körperschalleinleitung und die resultierende Schallabstrahlung noch zur Beschreibung der Auswirkungen eines porösen Materials. Akustische Messungen für die aufgezeigte Problemstellung (überströmtes Bauteil ohne und mit porösem Material) erweisen sich als aufwendig und damit teuer. Einen vielversprechenden Ansatz, Informationen über das zu untersuchende System zu erlangen, stellt die Simulation dar. Das Ziel dieser Arbeit ist daher die Entwicklung eines numerischen Verfahrens, das den strömungsinduzierten Körperschalleintrag und die strukturelle Schallabstrahlung abbildet und dabei zudem den Einfluss von porösem Material wiedergibt.

Die Wirkung des porösen Materials auf die Strömung und die Schallausbreitung innerhalb der Strömung (Aeroakustik) werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

1.1 Stand der Forschung

Die Abbildung 1.2 zeigt das im Rahmen dieser Arbeit zu untersuchende System. Es setzt sich zusammen aus einem strömenden Fluid, gegebenenfalls einer porösen Schicht, einer flexiblen Struktur und einem akustischem Fluid, in das hinein Schallabstrahlung erfolgt. Die Vorgänge in diesen vier Teilbereichen lassen sich durch jeweils unterschiedliche physikalische Gesetzmäßigkeiten darstellen, so dass sich für jedes Teilgebiet eigene Methoden zur Beschreibung des Verhaltens entwickelt haben. Im folgenden Abschnitt werden die üblichen Verfahren vorgestellt.

Zur Beschreibung des interessierenden Systems ist die alleinige Betrachtung der Teilbereiche nicht zielführend. Die Teilsysteme sind miteinander verbunden und daher gegenseitigen Wechselwirkungen ausgesetzt. Diese Interaktionen können nicht vernachlässigt werden und machen die Beschreibung des zu untersuchenden Systems erst komplett. Im Rahmen dieser Arbeit sind die Interaktionen zwischen verschiedenen Teilbereichen zu berücksichtigen. Abschnitt 1.1.2 gibt einen Überblick zur Behandlung von verschiedenen Interaktionsfragestellungen.

1.1.1 Abbildung der Teilsysteme

Strömung Die Strömungsmechanik beschreibt die Verhältnisse, die sich in einem sich bewegendem Fluid (Gas oder Flüssigkeit) einstellen. Als Grundgleichungen gelten die sogenannten Navier-Stokes-Gleichungen, die ein System partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung darstellen. Sie basieren auf der Erhaltung der makroskopischen Größen Masse, Impuls und Energie. Diese Gleichungen lassen sich für vereinfachte Spezialfälle analytisch lösen. Die Wiedergabe von in der Realität oftmals komplexen Strömungen ist mittels der analytischen Lösungen jedoch meistens nicht möglich. Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen erfolgt daher häufig numerisch. Dieses Vorgehen wird als numerische Strömungssimulation beziehungsweise als *computational fluid dynamics* (CFD) bezeichnet [88].

Übliche Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen in der Strömungsmechanik sind die Finite-Differenzen-Methode, die Finite-Elemente-Methode sowie die Finite-Volumen-Methode, die alle auf einer Diskretisierung des zu untersuchenden Bereichs basieren. Ersterer Methode liegt ein einfaches Berechnungsschema zugrunde und stellt die Ergebnisse punktweise dar, wird allerdings sehr aufwendig auf unstrukturierten Gittern und bringt Probleme bei starken Gradienten mit sich. Die Finite-Elemente-Methode in der Strömungsmechanik zeichnet sich durch eine komplexe mathematische Darstellung aus, die den Verlauf der Ergebnisse über einem Diskretisierungselement beschreibt, ist dafür jedoch auf beliebigen Gittern anwendbar. Durchgesetzt hat sich in der Strömungssimulation die Finite-Volumen-Methode, die die Ergebnisse als Zellmittelwerte repräsentiert und auf beliebigen Gittern funktioniert.

Eine weitere Möglichkeit zur Abbildung von Strömungen bietet die Lattice-Boltzmann-Methode, die auf der Berechnung einer vereinfachten Teilchen-Dynamik beruht. Hierbei werden Bewegungsprozesse auf mikroskopischer Ebene abgebildet, deren Mittelung das makroskopische Verhalten widerspiegelt. Die Methode setzt auf einer Vereinfachung der Boltzmann-Gleichung auf, die die Verteilungsdichte von Teilchen in einem Medium beschreibt [29].

Strukturmechanik Die Strukturmechanik wird hier herangezogen, um die Schwingungen des Bauteils, das einer äußeren Anregung unterliegt, zu beschreiben. Sie umfasst mechanische Modelle zur Festigkeits- und Verformungsbeschreibung von Festkörpern. Die Theorien über Strukturelemente wie Balken oder Platten führen zu Differentialgleichungen, die sich analytisch lösen lassen können, wenn einfache Geometrien betrachtet werden. Häufig werden dazu Fourierreihen herangezogen, was physikalisch einem Ansatz über die Summation der Eigenmoden der Struktur entspricht.

Für komplexe Bauteile existieren keine geschlossenen analytischen Lösungen. Die Beschreibung des Verhaltens von geometrisch komplizierten Bauteilen oder Tragwerken erfolgt

daher in der Regel mit Hilfe numerischer Methoden. Den am weitesten verbreiteten ist gemein, dass sie das zu betrachtende Bauteil in regelmäßige oder unregelmäßige Netze unterteilen und auf Basis dieser Diskretisierung die Differentialgleichung näherungsweise in ein lineares, lösbares Gleichungssystem umformen. Als ein Standardwerkzeug zur Struktursimulation hat sich die Finite-Elemente-Methode (FEM) im Ingenieurwesen durchgesetzt [132]. Sie führt auf ein effizient zu lösendes Gleichungssystem und bietet die Möglichkeit, Inhomogenitäten der Struktur sowie nichtlineares Material- und Verformungsverhalten abzubilden. Ihr liegt die Unterteilung des gesamten zu betrachtenden Gebiets in Teilgebiete, sogenannte *finite* Elemente, zugrunde. Diese Elemente werden durch Knoten, das heißt ihre Eckpunkte (und gegebenenfalls Punkte auf den Elementkanten und im Inneren des Elements), charakterisiert. Die beschreibenden Differentialgleichungen werden mittels dieser Diskretisierung in einer Näherung gelöst. Die FEM basiert auf einem Variationsprinzip und lässt sich beispielsweise über das Prinzip der virtuellen Arbeit [12] oder das Hamiltonsche Prinzip [118] herleiten. Eine andere Möglichkeit stellt ausgehend von den Differentialgleichungen die Residuenmethode dar.

Es existieren auch Möglichkeiten, die Randelementmethode (engl. *boundary element method*, BEM) zur Struktursimulation einzusetzen [23] (siehe unten).

Akustik Das Fachgebiet der Akustik befasst sich mit Schall und seiner Ausbreitung, wobei unter Schall allgemein Schwingungen und Wellen verstanden werden [42]. Schall kann sich in Fluiden (beispielsweise als Luftschall) ausbreiten, aber sich auch in elastischen Strukturen als sogenannter Körperschall [38] fortpflanzen. Hörschall ist der vom menschlichen Ohr wahrnehmbare Schall mit Frequenzen von 16 Hz bis 20 kHz.

Die Schallausbreitung in einem als ideal angenommenen ruhenden, homogenen Fluid lässt sich durch die Helmholtzgleichung (partielle Differentialgleichung) ausdrücken. Analytische Lösungen dieser Gleichung sind bei bestimmten Schallquellenkonfigurationen für die Ausbreitung in einen unendlichen Raum herleitbar, ebenso wie stehende Wellen in geometrisch einfachen begrenzten Gebieten. Für die Bestimmung der Schalldruckverteilung in realen Räumen oder die Schallabstrahlung von komplexen Flächen werden numerische Methoden angewandt.

In der Akustik wird zwischen Innenraumproblemen (Schallausbreitung in einem abgeschlossenen Gebiet) und Außenraumproblemen (Schallabstrahlung in ein unendliches Gebiet) unterschieden. Je nach Aufgabenstellung kommen Diskretisierungsmethoden wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) [54, 132] oder die Randelementmethode (BEM) [126] zur Anwendung.

Die Verwendung der FEM erfordert die Diskretisierung des gesamten betrachteten Bereichs, während für die BEM diskretisierte Ränder ausreichend sind. Letztere führt auf ein kleineres, aber vollbesetztes Gleichungssystem und ist nur anwendbar bei bekannter Fundamentallösung. Die BEM besitzt den Vorteil, die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung implizit zu erfüllen, so dass sie sich besonders für die Lösung von Außenraumproblemen anbietet. Die FEM kann für unendlich ausgedehnte Gebiete verwendet werden durch die Generierung eines künstlichen Gebietsrands, der die Reflexion von Wellen in das diskretisierte Gebiet hinein verhindert.

Ist eine Diskretisierung aufgrund zum Beispiel zu komplexer Bauteile nicht möglich, kann

die *statistische Energieanalyse* (SEA) eine Möglichkeit sein, um akustische Problemstellungen zu lösen [96]. Als statistische Methode erlaubt sie keine Aussagen über frequenzspezifisches Verhalten, sondern liefert einen Energiemittelwert für ein Frequenzband. Ihr liegt das Prinzip zugrunde, das Gesamtsystem in Subsysteme aufzuteilen, die untereinander gekoppelt sind. Die in den Subsystemen gespeicherte Energie wird unter Berücksichtigung von Verlustfaktoren für Dämpfung und Kopplung der Subsysteme untereinander zur Energieerhaltung bilanziert. Als Resultat ergeben sich die gemittelten Energien der Subsysteme, die Rückschlüsse auf das Verhalten des betrachteten Systems zulassen. Für aussagekräftige Ergebnisse ist im betrachteten Frequenzbereich eine bestimmte Modendichte erforderlich, so dass die SEA bei niedrigen Frequenzen im Allgemeinen nicht anwendbar ist.

Ein weiteres Verfahren stellt das *Raytracing* dar. Es basiert auf der Vorstellung, dass Schall sich entlang eines Strahls (in Analogie zur Optik) ausbreitet [128]. Die Raytracing-Methode kann Reflexionen an Wänden wiedergeben, Beugungseffekte werden in der Regel jedoch nicht berücksichtigt, da das Verfahren auf einer rein geometrischen Formulierung basiert und nicht den Wellencharakter beinhaltet.

Im Ingenieurwesen existieren für eine Reihe von akustischen Anwendungen empirische, beziehungsweise vereinfachte Formeln, die mit hinreichender Genauigkeit angewandt werden können. Beispiele sind das Massegesetz für Trennbauteile, die Nachhallzeit von Räumen sowie Dämpfungsmaße [42].

Poröse Materialien Poröse Materialien wie zum Beispiel Schaumstoffe oder Filze werden seit Langem zur Reduzierung von Schalleinflüssen verwendet. Ein poröses Material besteht aus einem strukturellen Gerüst und fluidgefüllten Porenräumen, die sich gegenseitig beeinflussen können.

Ausgehend von Untersuchungen bodenmechanischer Probleme [40] gibt Biot eine Formulierung zur Beschreibung der Wellenausbreitung in gesättigten Medien mit einem deformierbaren Strukturgerüst (poroelastische Materialien) und wendet diese auf die akustische Wellenausbreitung an [18–20]. Seine Modellierung umfasst zwei Longitudinal- sowie eine Transversalwelle. Biots Modell liefert für eine große Bandbreite praktischer Probleme gute Ergebnisse und wird als Standard akzeptiert. Umsetzungen des Modells existieren für die Finite-Elemente-Methode und die Randelementemethode [113].

Atalla *et al.* [9] sowie Debergue *et al.* [41] modifizieren Biots auf den Verschiebungen der einzelnen Phasen basierende Formulierung, indem die Fluidphase durch den Porendruck beschrieben wird.

Weitere einfachere Ansätze existieren zur Modellierung poröser Materialien [3], zum Beispiel sogenannte äquivalente Fluidansätze [28], die ausschließlich eine Kompressionswelle abbilden.

1.1.2 Berücksichtigung der Interaktionen

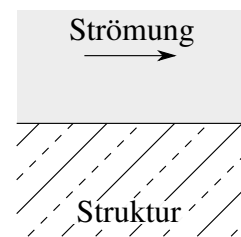
Wie zuvor ausgeführt können die einzelnen Teilsysteme Strömung, Struktur, akustisches Fluid und gegebenenfalls poröses Material nicht isoliert betrachtet werden, wenn die Auswirkungen von strömungsinduzierter Körperschalleinleitung zu beurteilen sind.

Eine Vielzahl von Arbeiten beschäftigt sich mit der Untersuchung von gekoppelten Systemen, deren Ursprung in verschiedenen Fachbereichen wie der Luftfahrt oder der Maschinenakustik liegt.

Strömung – Struktur Ausgehend vom Anwendungsfall des umströmten Flugzeugs [60] entwickelt sich das Fachgebiet der Aeroelastik, welche die Wechselwirkungen von aerodynamischen und strukturellen Kräften beinhaltet und somit Fluid-Struktur-Interaktionen beschreibt.

Den wichtigsten Referenzfall zur Kopplung von Strömung und Struktur stellt eine überströmte Platte dar. Bei diesem Modell strömt ein Fluid parallel zu der Fläche einer Platte. Die Platte ihrerseits beginnt dadurch zu schwingen.

Um die von einer Strömung auf eine Struktur wirkende Last zu ermitteln, finden ab Mitte der 1950er Jahre Messungen zur Evaluierung der Druckschwankungen in und unter einer turbulenten Grenzschicht statt. Eine Zusammenfassung gibt Willmarth [130]. Zur Beschreibung der statistischen Druckschwankungen wird auf eine Raum-Zeit-Korrelationsfunktion zurückgegriffen, deren Fourier-Transformierte ein Kreuzleistungsspektrum darstellt. Corcos stellt 1964 ein Modell zur Beschreibung von Druckschwankungen in turbulenten Grenzschichten auf [36, 37], das sich zu einer weit anerkannten Standardformulierung entwickelt. Corcos' Modell kombiniert ein Frequenzspektrum eines einzelnen Punktes mit Korrekturtermen für die Separation in Strömungs- und Querrichtung zu einem Wellenzahl-Frequenz-Spektrum. Das Modell nach Corcos hat den Vorteil, dass das Wellenzahl-Frequenz-Spektrum der Druckschwankungen in einer geschlossenen Form herzuleiten ist. Es weist Schwächen im Bereich tiefer Frequenzen auf, da es dort überhöhte Werte prognostiziert. Daher erfährt das Modell im Laufe der Zeit Erweiterungen, um bestimmten Problemstellungen gerecht zu werden. Eine Übersicht gibt Bull [27], einen Vergleich der bekanntesten Modelle zeigen Borisjuk und Grinchenko [24]. In seiner generellen Form ist Corcos' Modell ausreichend genau für ein Vielzahl von Fällen [32, 49, 64, 67, 107, 124]. Eine Zusammenfassung der Entwicklung gibt Blake in seinem Buch zu störungsinduziertem Schall [21].



Den ersten Arbeiten zur Beschreibung des Verhaltens von überströmten Platten liegt für die Wanddruckschwankungen das Modell nach Corcos – gegebenenfalls modifiziert – zugrunde, während für die Schwingungen der Platte ein modaler Ansatz gewählt wird, der auf einer Summation über die natürlichen Moden der Platte basiert [32, 64, 124].

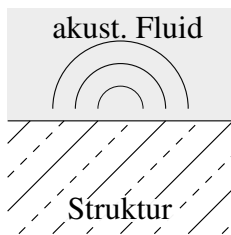
Han *et al.* [67, 68] wählen zur Beschreibung der Plattenschwingungen die *energy flow analysis* (EFA), wofür das Wellenzahl-Frequenz-Spektrum aus dem Modell nach Corcos zunächst in eine Formulierung zur Krafteinleitung umgewandelt werden muss. Für die Platte kann eine Schwingungsgleichung hergeleitet werden, die die Energiedichte als auch die Dichte der eingeleiteten Kräfte beinhaltet. Die Gleichung ist unter Zuhilfenahme der Fourier-Erweiterung über die Eigenmoden der Platte analytisch lösbar. Maury *et al.* [97] beziehen in ihre Betrachtungen die Eigenmoden des gekoppelten Systems Fluid/Platte ein. Park *et al.* [107] betrachten die strömungsinduzierte Anregung einer viskoelastisch gelagerten Platte, wobei die Vibrationen der Platte mit einem Ritz-Rayleigh-Ansatz und Balkenfunktionen als Testfunktionen analysiert werden, und wenden ihr Verfahren auf den Anwendungsfall eines seitlichen Autofensters

an [106].

Hambric *et al.* [66] verwenden neben unterschiedlichen Modellen für die Wanddruckschwankungen ein Finite-Elemente-Modell für die Platte und untersuchen die Auswirkungen von fester und freier Einspannung der Plattenränder.

Siefert *et al.* [121] zeigen ein Modell für Wanddruckschwankungen in einer Zeitbereichsformulierung auf, das auf empirischen Daten und der *random-particle-mesh*-Methode (RPM) basiert, und koppeln dieses mit einer FE-Formulierung im Zeitbereich für eine überströmte Platte.

Struktur – akustisches Fluid Eine erste Ausführung zur Schallabstrahlung von punktförmig angeregten Platten macht Heckl 1959 [71]. Er leitet über die Summation der Eigenmoden der Platte eine Formulierung zur abgestrahlten Leistung her und vergleicht diese mit Messungen. Sewell [119] gibt eine Formulierung für den Transmissionsfaktor für eine Platte eingebaut in einer schallharten Wand bei diffusem Schalleinfall.



Berry *et al.* [17] zeigen eine allgemeine Formulierung für die Schallabstrahlung von rechteckigen Platten auf, die auf dem Hamiltonschen Prinzip beruht unter Verwendung eines Ritz-Rayleigh-Ansatzes und Wichtungsfunktionen basierend auf den Eigenschwingungen der Platte, ohne Berücksichtigung einer Ankopplung von Luft oder anderen Medien (Betrachtung *in vacuo*). Berry [16] erweitert anschließend diesen Ansatz um die Kopplung mit umgebenden Fluiden. Atalla *et al.* [8] modifizieren Berrys Ansatz für die Abstrahlung von nicht eingebetteten Platten.

Atalla und Nicolas [7] unterbreiten einen Vorschlag zur effizienteren Berechnung der Beiträge zur Abstrahlimpedanz, die zur Beschreibung der Interaktion bei Verwendung von modalen Ansätzen benötigt wird. Laulagnet [87] leitet die Abstrahlungsimpedanzterme für nicht eingebettete Platten her und vergleicht das Abstrahlverhalten eingebetteter und nicht eingebetteter Platten. Mit der Wahl von trigonometrischen Ansatzfunktionen beschreiben Nelisse *et al.* [103] ein generalisiertes semi-analytisches Vorgehen zur Ermittlung der Schallabstrahlung von Platten mit beliebigen Einspannbedingungen.

Weitere Arbeiten unter Verwendung modaler Ansätze beschäftigen sich zum Beispiel mit Platten mit linear variierender Dicke [98], aufgetragenen viskoelastischen dämpfenden Schichten [82], oder dem Transmissionsverhalten [55, 92]. Collery und Guyader modifizieren die Methode zur Ermittlung von Schallabstrahlung durch einen Ansatz zur Fehlerminimierung [34, 35].

Um die Schallabstrahlung in ein sich bewegendes Fluid zu ermitteln, koppelt Frampton [57] die Plattenmoden mit der Gleichung für Potentialströmung, um somit die gegenseitigen Wechselwirkungen zu erfassen.

Ein anderer Ansatz für ebene Platten ist die Verwendung der Abstrahlungswiderstandsmatrix, aus der Abstrahlungsmoden hergeleitet werden können [5]. Die Partikelgeschwindigkeit auf der Platte wird bei dieser Methode vereinfacht wiedergegeben, die Kopplung von Struktur und Fluid erfolgt nur einseitig. Das Verfahren ist auch als *lumped parameter model* bekannt. Daneben sind weitere Näherungsverfahren zur Bestimmung der Schallleistung entwickelt worden [59].

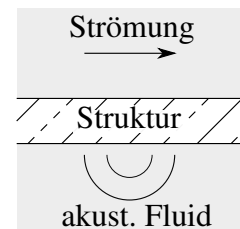
Mit zunehmender Verfügbarkeit von Rechnerleistung und Speicherplatz werden Ansätze

verfolgt, Struktur und Fluid mittels numerischer Verfahren zu koppeln und so die Interaktion der Teilbereiche vollständig zu beschreiben. Die Struktur wird dabei durch die Finite-Elemente-Methode simuliert, für die Schallabstrahlung kann die Randelementemethode (*boundary element method*, BEM) herangezogen werden [31, 62, 85, 111, 127]. Die numerischen Verfahren und die Kopplungsbedingungen für diesen Fall sind in den Kapiteln 3 und 4 näher beschrieben.

Daneben existieren weitere Verfahren, um die Kopplung unterschiedlicher Teilbereiche wiederzugeben. Dazu zählen beispielsweise die Verwendung von infiniten Elementen oder *perfectly matched layers* (PML), die *Dirichlet-to-Neumann*-Kopplung und die *scaled boundary finite element method* (SBFEM).

Strömung – Struktur – akustisches Fluid Bei bestimmten Fragestellungen ist das System von Strömung, Struktur und Schallabstrahlung in ein akustisches Fluid zu beleuchten, beispielsweise wenn es um Passagierkomfort in Autos oder Flugzeugen geht.

Graham [64] entwickelt ein Modell zur Ermittlung der strömungsinduzierten Schallabstrahlung in Flugzeugkabinen. Es handelt sich um eine überströmte Platte, die zu beiden Seiten Schall abstrahlt. Das Modell basiert auf dem Ansatz nach Corcos für die Druckschwankungen in einer turbulenten Grenzschicht beziehungsweise einer davon abgeleiteten Modifizierung und verwendet zur Beschreibung der Plattenschwingungen die Summation über die Eigenmoden der Platte. Die Schallabstrahlung wird durch ein dimensionsloses Frequenzleistungsspektrum beschrieben.

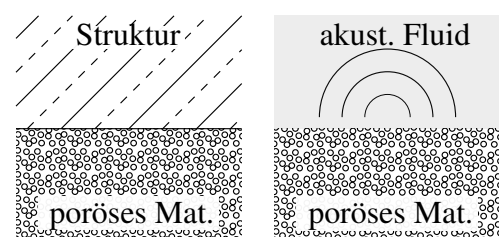


Han *et al.* [67] ermitteln die von einer überströmten Platte abgestrahlte Schallleistung über die Abstrahleffektivität der Platte und die gemittelte Plattengeschwindigkeit. Park *et al.* [106] stellen im Rahmen ihrer Untersuchungen zum seitlichen Autofenster einen Ausdruck zur abgestrahlten Schallleistung auf, der neben den modalen Ansätzen zur Beschreibung der Plattenschwingungen das Kreuzleistungsspektrum nach Corcos als Parameter enthält. Das akustische Fluid ist in allen Arbeiten jeweils nur einfach an die Struktur angebunden, das heißt eine Rückwirkung des Schalls auf die Struktur ist nicht berücksichtigt.

Schäfer *et al.* [116] verwenden numerische Methoden, um die Strömung über eine flexible Platte und die zugehörige Schallabstrahlung zu simulieren. Das Verfahren lässt eine Unterscheidung in aeroakustischen Schall und strukturelle Schallabstrahlung zu. Auch hier ist keine Beeinflussung der Struktur durch das Schallfeld berücksichtigt.

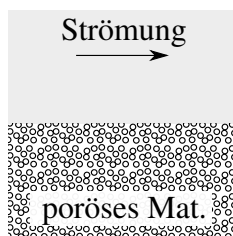
Poröses Material – akustisches Fluid oder Struktur Die Interaktion von porösen Materialien mit einem akustischen Fluid oder einer Struktur findet sich beispielsweise in der Raum- und Bauakustik. Poröse Materialien werden dort als absorbierende Auskleidungen eingesetzt.

Eine Formulierung der Interaktionsbedingungen für ein poroelastisches Material nach Biot geben Paneton *et al.* [105] und Debergue *et al.* [41]. Clasen [33] koppelt unter Verwendung der FEM poröse Materialien nach Biots Theorie und als äquivalentes Fluid sowohl an ein akustisches



Fluid (Raumluft) als auch an Struktur (Wände, Trennbauteile). Davidsson [39] untersucht die Systeme “poroelastisches Material – Struktur” sowie “poroelastisches Material – akustisches Fluid” unter Anwendung von Reduktionsmethoden im Rahmen einer FE-Formulierung.

Poröses Material – Strömung Experimentelle Untersuchungen zur Interaktion einer Luftströmung mit einem porösen Material führen Beavers und Joseph durch [14]. Sie betrachten eine Strömung parallel zu der Oberfläche eines porösen Materials und geben eine empirische Formulierung für eine Übergangsbedingung an der Grenzfläche von Strömung und porösem Material. Eine theoretische Bestätigung erfolgt durch Saffman [110].



Weitere analytische Arbeiten zur gleichen Problemstellung folgen von Jäger und Jäger *et al.* [76,78]. Laptev [86] vergleicht zwei unterschiedliche Übergangsbedingungen und gibt numerische Auswertungen. Alle Arbeiten gehen von einem nichtdeformierbaren Strukturgerüst des porösen Mediums aus.

Bei poroelastischen Materialien werden die Verformungen der strukturellen Phase berücksichtigt. Showalter betrachtet die Interaktion einer schleichenden Strömung mit einem poroelastischen Material und leitet mathematisch die Lösung des gekoppelten Systems her [120]. Eine erste Arbeit zur Durchströmung von poroelastischem Material in Normalenrichtung liefert Muntz [100].

1.2 Ziele

Ziel der Arbeit ist es, einen Ansatz aufzuzeigen, mit dem strömungsinduzierter Körperschalleintrag in eine Struktur oder ein poröses Material, dessen Weiterleitung und gegebenenfalls resultierende Schallabstrahlung abgebildet werden kann.

Diesem Ansatz liegen numerische Verfahren zugrunde, die geeignet sind, auch komplexe Geometrien wiederzugeben, was durch die vorgenannten analytischen Arbeiten nicht realisierbar ist, da sie sich auf rechteckige Platten oder andere einfache Geometrien beschränken. Die einzelnen Teilsysteme werden durch erprobte Berechnungsmethoden dargestellt, um die jeweiligen Vorteile dieser Methoden effizient zu nutzen. Das Zusammenspiel der einzelnen Teilsysteme sichern dabei entsprechende Kopplungsbedingungen, die alle relevanten Wechselwirkungen berücksichtigen und so das Verhalten des Gesamtsystems korrekt abbilden.

Von besonderem Interesse im Rahmen dieser Arbeit ist die zutreffende Formulierung der Übergangsbedingungen zwischen Strömung und poroelastischem Material. Während die weiteren hier berücksichtigten Kopplungsbedingungen als etabliert gelten, existieren unterschiedliche Aussagen über die korrekte Abbildung der Interaktionen zwischen einer Strömung und einem poroelastischen Medium. Die in der Literatur für die Grenzfläche zwischen den beiden Teilsystemen angegebenen Kopplungsbedingungen werden diskutiert. Anschließend erfolgt eine Aufstellung der Kopplungsbedingungen für eine Finite-Elemente-Formulierung und deren Implementierung. Die Verwendung der Finite-Elemente-Methode erlaubt so die Betrachtung beliebiger überströmter Geometrien mit einem numerisch robusten Verfahren. Die Betrachtung

im Frequenzbereich ermöglicht die Analyse des Schwingungsverhaltens unter Berücksichtigung der strömungsinduzierten Anregung.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Rückwirkungen auf die Strömung vernachlässigt, da ihre Auswirkungen gering sind. Dieses bringt den Vorteil mit sich, unabhängig in der Wahl des Simulationsverfahrens für die Strömung zu sein, solange die Bereitstellung der relevanten Daten an der Schnittstelle eingehalten ist.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Zunächst werden in Kapitel 2 die den einzelnen Teilsystemen zugrunde liegenden Modelle aufgezeigt. Kapitel 3 beschreibt die verwendeten Simulationsmethoden. Die Interaktionen der Teilsysteme untereinander werden in Kapitel 4 vorgestellt. Der Fokus liegt auf der Erläuterung der Interaktionen zwischen porösem Material und Strömung sowie der Herleitung der FE-Implementierung. Kapitel 5 zeigt Plausibilitätsstudien zu den implementierten Kopplungsbedingungen zwischen Strömung und poroelastischem Material. In Kapitel 6 wird exemplarisch die Anwendung des Verfahrens für die Schallabstrahlung eines überströmten Bauteils ohne und mit poröser Schicht dargestellt. Ebenso wird ein Beispiel zur Beeinflussung des Körperschalls durch poröses Material gegeben. Ein abschließendes Beispiel behandelt die mögliche Ausbildung einer Hinterkante aus poroelastischem Material.

Anhand der dargestellten Beispiele soll aufgezeigt werden, dass das vorgestellte Berechnungsverfahren geeignet ist, strömungsinduzierten Körperschalleintrag und dessen Minderung durch poroelastisches Material abzuschätzen.

2 Modellbildung

In diesem Kapitel werden die einzelnen Modelle, die dem Verfahren zur Abbildung von strömungsinduzierten Körperschalleintrag zugrunde liegen, erläutert. Die Abbildung 2.1 zeigt schematisch das Gesamtsystem mit den einzelnen Komponenten Strömung, poröses Material, Struktur und akustisches Fluid auf.

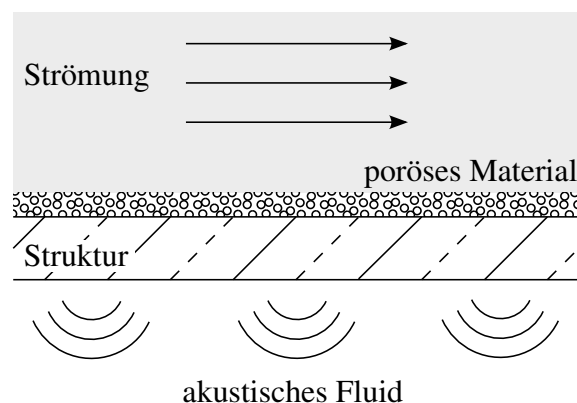


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung: strömungsinduzierte Anregung einer mit einer porösen Schicht belegten flexiblen Platte und resultierende Schallabstrahlung

Modellbildung vollzieht sich im Allgemeinen in fünf Teilschritten [108] (siehe Abbildung 2.2). Die Realität wird zunächst in ein physikalisches Modell überführt, das die jeweiligen Phänomene abbildet. Für die hier betrachteten Fälle sind dies die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie. Das physikalische Modell wird im nächsten Schritt in mathematischen Gleichungen ausgedrückt. Diese Gleichungen lassen sich nur in den einfachsten Fällen analytisch lösen. Die zu untersuchenden Systeme sind im Allgemeinen so komplex, dass eine Lösung nur durch eine numerische Approximation möglich ist. Im Simulationscode wird letztlich das approximier- te mathematische Modell mit weiteren Näherungen (zum Beispiel durch Gittergeometrie oder iterative Gleichungslöser) kombiniert.

In den folgenden Abschnitten werden die mathematischen Modelle für die einzelnen Komponenten vorgestellt. In Kapitel 3 erfolgt die Darstellung der numerischen Umsetzung. Die Interaktion der Komponenten untereinander wird durch die Kopplung der jeweiligen Modelle berücksichtigt und ist in Kapitel 4 beschrieben.

Realität
Physikalisches Modell
Mathematisches Modell
Numerische Approximation
Simulationscode

Abbildung 2.2: Modellierungsstufen (nach [108])

2.1 Strömung

Die Beschreibung eines Strömungsvorgangs fällt in das Fachgebiet der Fluidmechanik. Als Fluide werden gasförmige und flüssige Medien bezeichnet, die ein nichtfestes Kontinuum bilden (siehe zum Beispiel [122]).

Fluide können inkompressibler oder kompressibler Natur sein, das heißt, ihr Volumen ist als konstant beziehungsweise veränderlich anzusehen. Sie werden näherungsweise dann als inkompressibel angenommen, wenn die Dichteänderungen $\Delta\rho$ in einer Strömung sehr klein sind gegenüber der Dichte des Fluids ρ_0 .

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \ll 1 \quad (2.1)$$

Unter Berücksichtigung des Gesetzes von Boyle-Mariotte, das die Volumenänderung ΔV eines Ursprungsvolumens V_0 in Bezug zur Druckänderung Δp gegenüber einem Referenzdruck p_0 setzt

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx -\frac{\Delta p}{p_0}, \quad (2.2)$$

der Massenerhaltung

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx -\frac{\Delta\rho}{\rho_0}, \quad (2.3)$$

der Schallgeschwindigkeit c bei infinitesimalen Störgrößen

$$c^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho}, \quad (2.4)$$

und der Definition der Machzahl Ma als das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit v zur Schallgeschwindigkeit

$$Ma = \frac{v}{c} \quad (2.5)$$

lässt sich Gleichung 2.1 ausdrücken als

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2}Ma^2 \quad (2.6)$$

Bei Machzahlen bis zu $Ma \approx 0,3$ ergeben sich relative Dichteänderungen von 5%, so dass bei solchen Strömungen die Einflüsse aus Kompressibilität vernachlässigt werden können.

Fluide werden desweiteren nach ihrer Viskosität unterschieden, das heißt, nach ihrer Fähigkeit, bei Verformung aufgrund innerer Reibung Spannungen aufzunehmen. Das von Newton

aufgestellte Fluidreibungsgesetz postuliert einen linearen Zusammenhang der im Fluid herrschenden Tangentialspannung τ und der auch als Geschwindigkeitsgefälle bezeichneten Scher-rate D über den Proportionalitätsfaktor μ , die dynamische Viskosität.

$$\tau = \mu \cdot D \quad (2.7)$$

Im Dreidimensionalen werden die Spannungen aufgrund von Reibung in einem strömenden Fluid durch den Reibungsspannungstensor ausgedrückt, der Normal- als auch Schubspannungen beinhaltet (σ_i beziehungsweise τ_{ij}). Es ergibt sich

$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

für inkompressible Strömungen. Diese Spannungen werden auch als effektive Spannungen bezeichnet; i und j bezeichnen die drei Raumrichtungen. Der Gesamtspannungstensor σ'_{ij} eines strömenden Fluids beinhaltet zusätzlich den Druck p .

$$\sigma'_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2.9)$$

Sogenannte ideale Fluide sind Fluide ohne Reibung und führen zu einer vereinfachten Beschreibung. Der lineare Zusammenhang des Fluidreibungsgesetzes stellt eine Grundlage der Fluidmechanik im engeren Sinne dar [122]. Das Fachgebiet der Rheologie beschreibt das Verhalten nicht-Newtonscher Fluide.

Ein sich bewegendes Fluidelement dV unterliegt somit

- Volumenkräften aus Schwerkraft ΔF_G und Trägheit (beziehungsweise Beschleunigung) ΔF_B und
- Oberflächenkräften aus Druckkraft ΔF_D und aus Widerstandskräften aufgrund von Viskosität ΔF_V .

Bezieht man die vorgenannten Kräfte ΔF_k auf das Volumen des Fluidelements, so ergeben sich die spezifischen Kräfte $f_k = \frac{\Delta F_k}{dV}$, die im dynamischen Gleichgewicht stehen und auf die Grundgleichung der Fluidmechanik führen:

$$(f_G)_i + (f_B)_i + (f_D)_i + (f_V)_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

Strömungen werden danach unterschieden, ob die viskosen Kräfte oder die Trägheitskräfte dominieren. Im ersten Fall handelt es sich um laminare Strömungen (Schichtströmungen), im zweiten um turbulente (Wirbelströmungen). Ein Maß dafür ist die dimensionslose Reynoldszahl, die das Verhältnis von Trägheitskraft zu Reibungskraft beschreibt

$$Re = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{v \cdot d_{char}}{\nu}, \quad (2.11)$$

in die die Strömungsgeschwindigkeit v , die kinematische Viskosität ν und eine von der jeweiligen Problemstellung abhängige charakteristische Länge d_{char} eingehen. Ab einer kritischen Reynoldszahl Re_{krit} geht eine laminare Strömung in eine turbulente über. Laminare Strömungen sind durch geordnete Strombahnen charakterisiert, Fluktuationen finden nur im Mikroskopischen durch die Molekularbewegung statt. In turbulenten Strömungen hingegen treten unregelmäßige Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen auf.

2.1.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen stellen die Grundgleichungen der Fluidmechanik dar. Sie setzen sich aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zusammen. Die Viskosität wird durch den Stokesschen Reibungsansatz berücksichtigt, der eine Verallgemeinerung von Newtons Reibungsgesetz darstellt und auf Empirie beruht. Eine ausführliche Herleitung für den allgemeinen Fall von kompressiblen Fluiden gibt [117].

Nimmt man eine inkompressible Strömung an ($Ma < 0,3$), so vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen zu

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.12)$$

und

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \quad (2.13)$$

mit dem Index i für die drei Raumrichtungen ($i = 1, 2, 3$), der Strömungsgeschwindigkeit v_i , der als konstant angenommenen Fluidichte ρ und f_i für Schwerkraft beziehungsweise von außen wirkende Volumenkräfte.

Gleichung 2.12 ist die Kontinuitätsgleichung. In der aus der Impulsgleichung abgeleiteten Gleichung 2.13 bezeichnet der Term auf der linken Seite die Trägheitskräfte, auf der rechten Seite finden sich Terme für den Einfluss von Schwerkraft (und gegebenenfalls äußeren Kräften), Fluidruckkraft und Viskosität. Der Schwerkrafteinfluss wird häufig nicht separat aufgeführt, sondern geht in die Druckkomponente ein. Die vollständige Zeitableitung lässt sich aufteilen in einen lokalen und einen konvektiven Anteil:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (2.14)$$

wobei für den Index j ebenfalls $j = 1, 2, 3$ gilt.

Die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen stellen ein System aus vier gekoppelten Differentialgleichungen für die Geschwindigkeiten in die drei Raumrichtungen und den Druck in Abhängigkeit der Ortskoordinaten und der Zeit dar. Das Differentialgleichungssystem ist aufgrund der dynamischen Viskosität μ von zweiter Ordnung und wegen der vollständigen Zeitableitung nichtlinear und transient (instationär). Zur Lösung sind daher nicht nur Randbedingungen, wie zum Beispiel die Haftbedingung an einer festen Wand, erforderlich, sondern auch Anfangsbedingungen.

Reduzierte Navier-Stokes-Gleichungen Abhängig davon, welche physikalischen Phänomene für die jeweils betrachtete Strömung relevant sind, können die Navier-Stokes-Gleichungen weiter vereinfacht werden.

Die Vernachlässigung von Reibungseffekten bei niedrigen Viskositäten beziehungsweise hohen Reynoldszahlen ($Re \rightarrow \infty$) führt auf die sogenannten *Euler-Gleichungen*. Für drehungsfreie inkompressible Strömungen lassen sich die Euler-Gleichungen in eine lineare Potentialgleichung umformen, für die analytische Lösungen bekannt sind [88].

Stokes-Strömungen sind schleichende Strömungen mit sehr kleinen Reynoldszahlen ($Re \ll 1$). In diesem Fall können die Trägheitseffekte unberücksichtigt bleiben. Der konvektive Anteil, der für die Nichtlinearität verantwortlich ist, fällt somit heraus. Die so reduzierten Gleichungen werden als *Stokes-Gleichungen* bezeichnet.

Während für die Navier-Stokes-Gleichungen keine allgemeinen analytischen Lösungen existieren, gibt es analytische Lösungen bei bestimmten Randbedingungen für die vorgenannten Fälle. Auch die Annahme einer Schichtströmung (Strömung nur in einer Richtung) führt auf analytische Lösungen [88].

Bei stationären Strömungen wird von einem über die Zeit gleichbleibendem Verhalten der Strömung ausgegangen. In diesem Fall entfällt der lokale Beschleunigungsanteil ($\partial v_i / \partial t$) und somit die Zeitabhängigkeit des Gleichungssystems. Die Vorgabe von (physikalisch sinnvollen) Randbedingung ist ausreichend, um zu einer Lösung zur Beschreibung der Strömung zu gelangen.

Turbulente Strömungen Turbulente Strömungen weisen höhere Energieverluste auf, da bei höherem Geschwindigkeitsgefälle das viskose Verhalten stärker zum Tragen kommt und zudem aufgrund der Vermischung zeitlich-räumlich fluktuierende Konvektionsanteile zu einem effektiven Anstieg der Diffusion führen, ausgedrückt durch sogenannte turbulente Scheinschubspannungen τ_t [72].

Eine Erweiterung der Navier-Stokes-Gleichungen unter Berücksichtigung der Scheinschubspannungen τ_t führt auf die Reynoldsgleichungen. Ausgangspunkt ist die Annahme, dass sich die Momentanwerte von Parametern in einer turbulenten Strömung durch ihren Mittelwert (\bar{v}, \bar{p}) überlagert mit einem Schwankungswert (v', p') ausdrücken lassen:

$$v = \bar{v} + v' \quad p = \bar{p} + p' \quad (2.15)$$

Setzt man die vorgenannten Ausdrücke in die Navier-Stokes-Gleichungen ein und führt sowohl die Differentiation als auch eine zeitliche Mittelung durch (Herleitung beispielsweise in [122]), ergeben sich die Reynoldsgleichungen:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i \cdot v'_j}). \quad (2.16)$$

ν ist die kinematische Viskosität, die sich aus μ/ρ ergibt. Der dritte Term auf der rechten Seite beschreibt (wie zuvor) die Schubspannungen aus Viskosität, während der letzte Term Spannungen aus Turbulenz, auch als Reynoldsspannungen bezeichnet, angibt. Die Ausdrücke links

geben die Beschleunigung wieder, die sich aus lokaler ($\partial v_i / \partial t$) und konvektiver Beschleunigung ($v_j \cdot \partial v_i / \partial x_j$) zusammensetzt. Der Querstrich als Kennzeichnung des Mittelwerts wird im Allgemeinen nicht notiert.

Die Lösung der Reynoldsgleichungen (auch als *Reynolds averaged Navier Stokes equations*, *RANSE* bezeichnet) liefert zeitlich gemittelte Größen, die für viele ingenieurtechnische Aufgabenstellungen ausreichend aussagekräftig sind.

2.1.2 Turbulenzmodelle

Zum Lösen des Systems partieller Differentialgleichungen (Gl. 2.16) müssen die Reynoldsspannungen bekannt sein. Diese sind jedoch nicht erfassbar, so dass neue Unbekannte in den Reynoldsgleichungen auftreten. Um das System zu schließen, werden sogenannte Turbulenzmodelle verwendet, um die Auswirkungen der Turbulenz zu berücksichtigen. Die Qualität der Lösung hängt von der Genauigkeit des Turbulenzmodells ab.

Die Modellierungsansätze der Turbulenz unterscheiden sich nach Art und ihrer Komplexität [91]:

- Wirbelviskositätsmodelle

Ausgangspunkt ist die Idee, dass der Tensor der Reynoldsspannungen proportional zum zeitgemittelten Deformationsgeschwindigkeitstensor ist. Die Wirbelviskosität $\nu_t = \mu_t / \rho$ kann auf mehreren Wegen abgebildet werden.

Nullgleichungsmodelle beschreiben die Wirbelviskosität über algebraische Gleichungen, in die die lokalen Strömungsgrößen eingehen. Hierzu gehört das Baldwin-Lomax-Modell, das für Tragflügelströmungen entwickelt wurde (siehe zum Beispiel [88]).

Eingleichungsmodelle

Hierbei wird eine Turbulenzgröße durch eine Differentialgleichung modelliert, die den Transport beschreibt. Ein Beispiel ist das Modell nach Spalart-Allmaras (siehe [108]).

Zweigleichungsmodelle

Die Wirbelviskosität ν_t wird durch zwei Parameter beschrieben, die durch jeweils eine unabhängige differentielle Transportgleichung ausgedrückt werden.

Im k - ε -Modell sind dies die turbulente kinetische Energie k und die turbulente Dissipation ε , die durch empirische Konstanten ergänzt werden [88]. Im k - ω -Modell wird anstelle der turbulenten Dissipation eine "spezifische" Dissipationsrate ω verwendet [108]. Ersteres Modell hat sich für Strömungen ohne Wandeinfluss bewährt, während letzteres wandnahe Strömungsphänomene genauer beschreibt. Im SST-Modell (*shear stress transport*) werden die vorgenannten Modelle gekoppelt, um die positiven Eigenschaften zu kombinieren.

- Reynoldsspannungsmodelle

Die sechs unterschiedlichen Komponenten des Reynoldsspannungstensors werden jeweils einzeln durch eine algebraische oder differentielle Transportgleichung abgebildet. Ihre Anwendung finden Reynoldsspannungsmodelle bei nichtisotroper Turbulenz und dem Auftreten von Sekundärströmungen.

Einen weiteren Ansatz stellen *Wirbelsimulationsmodelle* beziehungsweise die *Grobstruktursimulation* dar. Ausgehend davon, dass Turbulenz aus Strukturen unterschiedlicher Skalen (sowohl räumlich als auch zeitlich) besteht, werden großskalige Turbulenzerscheinungen direkt, das heißt ohne Modell, abgebildet und für kleinskalige Effekte ein Turbulenzmodell verwendet (üblicherweise ein Wirbelviskositätsmodell). Die Grobstruktursimulation erfolgt mittels der Navier-Stokes-Gleichungen, wobei eine räumliche Filterung erfolgt (siehe [88]). Der vorgenannte Ansatz wird als *Large Eddy Simulation*, LES, bezeichnet. Die *Detached Eddy Simulation*, DES, kombiniert die Modellierung der Reynoldsgleichungen in Wandnähe mit dem LES-Verfahren.

Je nach Anwendungsgebiet sind die einzelnen Vor- und Nachteile der verschiedenen Modelle abzuwägen.

2.2 Struktur

In einer Vielzahl von Konstruktionen wie zum Beispiel Rohrleitungen, Karosserien oder Tragflügeln besteht die tragende Struktur aus Platten oder plattenartigen Bauteilen. Als Platten bezeichnet man Bauteile, deren Dicke h im Verhältnis zu anderen Kantenlängen ℓ klein ist. Hinreichend dünne Platten ($h/\ell < 0,1$) lassen sich durch die Kirchhoffsche Plattentheorie beschreiben (siehe zum Beispiel [85]), für Platten bis zu mittlerer Dicke ($h/\ell < 0,2$) gilt der Ansatz nach Mindlin. Die Mindlinsche Theorie gilt für kleine Deformationen und berücksichtigt im Gegensatz zur Kirchhoffschen Theorie die Auswirkungen aus Schub; sie wird als Schubdeformationstheorie 1. Ordnung bezeichnet.

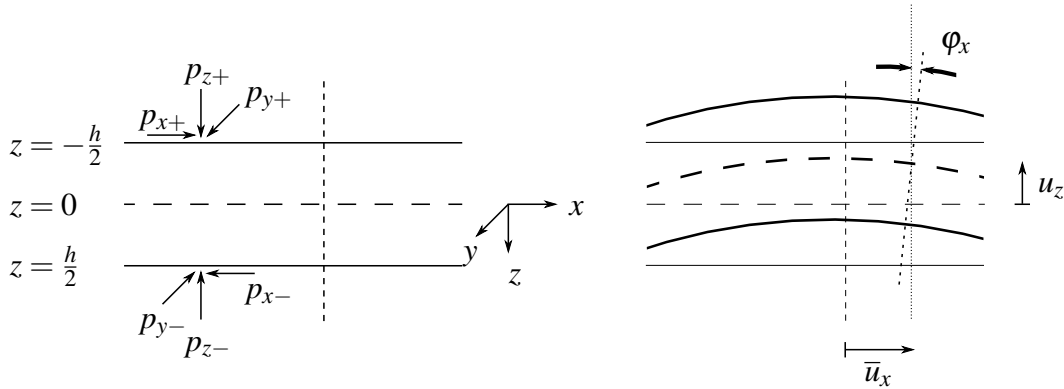


Abbildung 2.3: Koordinatensystem und Bezeichnungen für die Herleitung der Plattenbewegungsgleichung

Zur Beschreibung der Platte, ihrer Verformungen und Belastungen werden die in Abbildung 2.3 dargestellten Bezeichnungen verwendet. Für die Mindlinsche Plattentheorie wird von folgenden Annahmen ausgegangen:

- Die Plattendicke h ist klein verglichen mit den anderen Abmessungen, die Durchbiegungen u_z sind im Verhältnis zur Plattendicke h klein und die Neigungen sind klein im

Vergleich zu Eins ($\varphi_i \ll 1$).

- Gerade Schnitte orthogonal zur Mittelachse bleiben auch im verzerrten Zustand gerade, stehen jedoch nicht notwendigerweise weiterhin orthogonal zur Mittelachse.
- Die Normalspannungen senkrecht zur Platte σ_z sind wie im ebenen Spannungszustand vernachlässigbar.

Die Verschiebungen u_i der Platte lassen sich somit in x -, y - und z -Richtung angeben zu

$$u_x = \bar{u}_x + u_z \varphi_x, \quad u_y = \bar{u}_y + u_z \varphi_y, \quad u_z = u_z. \quad (2.17)$$

Die Herleitung der Bewegungsgleichung für eine Platte kann mit Hilfe des *Hamiltonschen Prinzips* erfolgen. Es besagt, dass die Bewegungen eines System so verlaufen, dass sich im zeitlichen Mittel für die Differenz aus kinetischer (E_{kin}) und potentieller Energie (E_{pot}) ein Extremwert ergibt [38], das heißt die zugehörige Variation zu Null wird.

Unter Berücksichtigung der von außen zugeführten Arbeit W ergibt sich

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \quad (2.18)$$

wobei $[t_1, t_2]$ ein Zeitintervall angibt.

Die kinetische Energie beinhaltet die Plattendichte ρ und die Integration über die Geschwindigkeitsquadrate

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \iiint \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (2.19)$$

Die potentielle Energie ist die von den Spannungen an den Verzerrungen geleistete Arbeit

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz. \quad (2.20)$$

σ und τ bezeichnen die Normal- beziehungsweise Schubspannungen, ϵ und γ Dehnungen beziehungsweise Schubwinkel. Ein einzelner Index bezeichnet die Achsrichtung, zusammengesetzte Indizes die Ebene senkrecht zur Achsrichtung sowie die Wirkungsrichtung.

Nimmt man die äußeren Belastungen p_i als Druck an, der sich aus der Differenz zwischen Plattenober- und -unterseite ergibt (zum Beispiel $p_x = p_{x+} - p_{x-}$), bestimmt sich die äußere Arbeit zu

$$W = \iint (p_x \bar{u}_x + p_y \bar{u}_y + p_z \bar{u}_z) dx dy. \quad (2.21)$$

Die Kombination der drei vorgenannten Gleichungen und die Variation jedes einzelnen Parameters führt auf fünf partielle Differentialgleichungen, von denen zwei die Bewegungen der Platte in ihrer Ebene (die sogenannten *in-plane*-Schwingungen) beschreiben und die drei weiteren die Biegewelle der Platte darstellen.

Unter der Annahme, dass ein zeitharmonischer Verlauf vorliegt, lassen sich alle Parameter der Anregung und Plattenschwingung mittels Amplitude und Kreisfrequenz ausdrücken.

$$f(\mathbf{x}, t) = \hat{f}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

f stellt eine beliebige Größe dar (zum Beispiel p_i , u_z , ϕ_x), \mathbf{x} den Ortsvektor. Ein $\hat{}$ bezeichnet die Amplitude dieser Größe, ω die Kreisfrequenz und i die imaginäre Einheit. Wird linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt (Hookesches Gesetz), lassen sich die Spannungen über die Materialparameter E-Modul E und Querkontraktionszahl ν und die Verzerrungen ε und γ ausdrücken.

Die fünf partiellen Differentialgleichungen lauten dann (vorne ist jeweils der variierte Parameter angegeben) im Frequenzbereich

$$\delta \hat{u}_x : \quad \frac{Eh}{1-\nu^2} \hat{u}_{x,xx} + Gh \hat{u}_{x,yy} + \frac{1+\nu}{1-\nu} Gh \hat{u}_{y,xy} + \omega^2 \rho h \hat{u}_x = -\hat{p}_x, \quad (2.23)$$

$$\delta \hat{u}_y : \quad \frac{Eh}{1-\nu^2} \hat{u}_{y,xx} + Gh \hat{u}_{y,yy} + \frac{1+\nu}{1-\nu} Gh \hat{u}_{x,xy} + \omega^2 \rho h \hat{u}_y = -\hat{p}_y, \quad (2.24)$$

$$\delta \hat{u}_z : \quad Ghk_S (\Delta \hat{u}_z + \hat{\phi}_{x,x} + \hat{\phi}_{y,y}) + \omega^2 \rho h \hat{u}_z = -\hat{p}_z, \quad (2.25)$$

$$\delta \hat{\phi}_x : \quad GI \hat{\phi}_{x,yy} + B \hat{\phi}_{x,xx} + \frac{1+\nu}{2} B \hat{\phi}_{y,xy} - Ghk_S (\hat{u}_{z,x} + \hat{\phi}_x) + \omega^2 \rho I \hat{\phi}_x = 0, \quad (2.26)$$

$$\delta \hat{\phi}_y : \quad GI \hat{\phi}_{y,xx} + B \hat{\phi}_{y,yy} + \frac{1+\nu}{2} B \hat{\phi}_{x,xy} - Ghk_S (\hat{u}_{z,y} + \hat{\phi}_y) + \omega^2 \rho I \hat{\phi}_y = 0. \quad (2.27)$$

Indizes hinter einem Komma stehen für partielle Ableitungen nach der jeweiligen Variablen. G ist der Schubmodul $E/(2(1+\nu))$, I das bezogene Flächenträgheitsmoment $h^3/12$ und B die Biegesteifigkeit $EI/(1-\nu^2)$. k_S ist der von der Querkontraktion abhängige Schubkorrekturfaktor, und wird zu $k_S = 5/(6-\nu)$ angenommen. Δ beschreibt den Laplace-Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Die Gleichungen 2.23 und 2.24 beschreiben die Verschiebungen in der xy -Ebene der Platte (in-plane-Schwingungen) und sind unabhängig von den übrigen Gleichungen. Diese (Gl. 2.25 – 2.27) lassen sich zur Biegewellengleichung nach Mindlin zusammenfassen:

$$B \Delta \Delta \hat{u}_z + \omega^2 \rho \left(\frac{B}{Gk_S} - I \right) \Delta \hat{u}_z - \omega^2 \rho h \hat{u}_z + \omega^4 \rho \frac{I}{Gk_S} \hat{u}_z = \hat{p}_z - \frac{B}{Ghk_S} \Delta \hat{p}_z - \omega^2 \rho \frac{I}{Ghk_S} \hat{p}_z. \quad (2.28)$$

Ausführliche Herleitungen der Differentialgleichungen für Plattenschwingungen finden sich in [1, 33, 38].

2.3 Akustisches Fluid

Eine Schallwelle in einem akustischen Fluid kann als eine Dichtewelle aufgefasst werden, bei der Schwingungsrichtung der einzelnen Teilchen und Ausbreitungsrichtung übereinstimmen (Longitudinalwelle). Ein Schallfeld entsteht aus der Überlagerung vieler einzelner solcher Wellen.

Eine Dichtewelle in einem idealen, das heißt reibungslosen Gas lässt sich durch die Auslenkungsgeschwindigkeit der Gasteilchen, der sogenannten Schallschnelle \mathbf{v} , und den skalaren Schalldruck p für jeden Ort beschreiben (siehe zum Beispiel [42]). Diese beiden Größen sind über die Bewegungsgleichung gekoppelt, die für ein ideales Gas in ihrer linearisierten Form

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \rho b(t) \quad (2.29)$$

lautet. b stellt dabei Volumenkräfte dar. ρ bezeichnet den schwankenden Teil der Dichte (akustische Dichteschwankung) des Gases, während ρ_0 die Dichte des Gases im ungestörten Zustand ist.

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt den Erhalt der Masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho a(t), \quad (2.30)$$

mit dem Parameter a für Quellterme.

Die Zustandsgleichung verknüpft die akustische Dichteschwankung ρ mit dem Schalldruck p bei konstanter Entropie S (adiabatische Zustandsänderung) zu

$$\frac{1}{c^2} = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_S. \quad (2.31)$$

Wird nun die akustische Dichteänderung ρ durch die Zustandsgleichung (Gl. 2.31) ersetzt und die Divergenz der Bewegungsgleichung (Gl. 2.29) und die zeitliche Ableitung der Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.30) gebildet und diese voneinander abgezogen, ergibt sich folgender Ausdruck

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \rho b - \nabla \cdot \nabla p - \frac{\partial}{\partial t} \rho a, \quad (2.32)$$

der sich bei Abwesenheit von Volumenkräften und Quelltermen auf

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.33)$$

reduziert (beispielsweise [46]). Wird wie im vorherigen Abschnitt 2.2 von einem zeitharmonischen Verhalten in der Form

$$p(\mathbf{x}, t) = \hat{p}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad (2.34)$$

ausgegangen, lässt sich Gleichung 2.33 in eine frequenzabhängige Darstellung umformen, wobei $\kappa = \omega/c$ die Wellenzahl darstellt. Diese sogenannte Helmholtz-Gleichung beschreibt die Wellenausbreitung in akustischen Fluiden.

$$\Delta p + \kappa^2 p = 0 \quad (2.35)$$

Eindeutigkeit der Lösung der Helmholtz-Gleichung Im Regelfall ist bei der Vorgabe von physikalisch sinnvollen Randbedingungen ein Problem eindeutig lösbar. Dieses gilt für die Helmholtz-Gleichung jedoch nur eingeschränkt, da im Rahmen der Modellierung Annahmen getroffen werden, die die Eindeutigkeit einer Lösung nicht mehr gewähren. Ob eine eindeutige Lösung für die Helmholtz-Gleichung existiert, hängt von der betrachteten Problemstellung und den vorgegebenen Randbedingungen ab. Diese werden im Folgenden kurz dargestellt.

- Akustische Problemstellungen unterscheiden sich nach dem Gebiet, auf das sie sich beziehen. Sogenannte Innenraumprobleme betrachten das Schallfeld eines in sich abgeschlossenen Bereiches Ω_i . Außenraumprobleme hingegen befassen sich mit der Schallausbreitung in einem unendlichen oder semi-infiniten Gebiet Ω_a .
- Zur Lösung der Helmholtz-Gleichung sind jeweils die Verhältnisse an den Rändern des Gebiets zu beschreiben. Auf dem Rand Γ können Vorgaben bezüglich des Schalldrucks p oder des Schallflusses q gemacht werden. Im ersten Fall handelt es sich um einen Dirichlet-Rand Γ_1 mit der Dirichlet-Randbedingung

$$p(\mathbf{x}) = \bar{p}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (2.36)$$

Der zweite Fall stellt einen Neumann-Rand Γ_2 dar, auf dem ein Schallfluss $q = \partial p / \partial n$ vorgegeben wird (Neumann-Randbedingung). \mathbf{n} beschreibt den nach außen gerichteten Normalenvektor an der Stelle \mathbf{x} .

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} = \bar{q}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (2.37)$$

Die Linearkombination von Dirichlet- und Neumann-Randbedingung nennt sich Robin-Randbedingung und wird zur Modellierung absorbierender Ränder verwendet. Abbildung 2.4 zeigt die vorgenannten Definitionen.

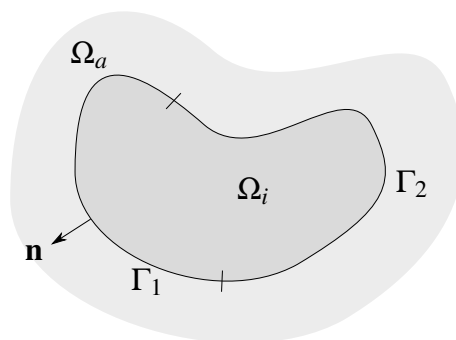


Abbildung 2.4: Definitionen bei akustischen Randwertproblemen

Für die Lösung von Innenraumproblemen ist nach der Wellenzahl κ der Helmholtz-Gleichung zwischen dem statischen Fall $\kappa = 0$, der Schwingung ohne Dämpfung $\Re(\kappa) > 0$, $\Im(\kappa) = 0$ und der Schwingung mit Dämpfung $\Re(\kappa) > 0$, $\Im(\kappa) > 0$ zu unterscheiden.

Für gedämpfte Schwingungen existiert sowohl für Dirichlet- als auch für Neumann-Randbedingungen eine eindeutige Lösung. Bei $\kappa = 0$ lässt sich eine Lösung der Helmholtz-Gleichung nur für Dirichlet-Randbedingungen eindeutig bestimmen, während die Lösung bei Vorgabe von Neumann-Randbedingungen nur auf eine Konstante genau ermittelt werden kann. Für ungedämpfte Schwingungen existieren keine eindeutigen Lösungen, vielmehr treten an den den Eigenmoden des Innenraums zugeordneten charakteristischen Wellenzahlen Eigenlösungen auf.

Die Eindeutigkeit von Außenraumproblemen kann hergestellt werden, indem die Erfüllung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung gefordert wird.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i\kappa p + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (2.38)$$

Sie besagt, dass sich Schallwellen nur in Richtung Unendlichkeit fortbewegen und keine Schallwellen in das Gebiet zurücklaufen.

Ausführliche Betrachtungen zur Eindeutigkeit von akustischen Randwertproblemen gibt [125].

Im Rahmen dieser Arbeit werden akustische Innenraumprobleme, wie sie beispielsweise in der Raumakustik auftreten, nicht betrachtet. Die Schallabstrahlung eines Bauteils wird als Außenraumproblem behandelt, so dass für die Existenz von eindeutigen Lösungen die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung erfüllt werden muss.

2.4 Poröses Material

Poröse Materialien bestehen aus zwei Phasen: einer Festkörperphase und einem fluidgefüllten Porenraum. Sie weisen dämpfende Eigenschaften auf, weil kinetische Energie durch Reibung der Fluidpartikel am Korngerüst dissipiert und somit dem System entzogen wird. So werden in der Bau- und Raumakustik die absorbierenden Eigenschaften von zum Beispiel Schaumstoffen und Mineralwollen zur Schalldämmung und Schalldämpfung eingesetzt [33, 83].

Mehrere Ansätze unterschiedlicher Komplexität existieren zur Beschreibung von porösen Materialien.

2.4.1 Äquivalenter Fluid-Ansatz

Ist bei einem porösen Material die Festkörperphase entweder als starr oder als sehr weich anzunehmen, kann zur Abbildung der akustischen Eigenschaften ein *äquivalenter Fluid-Ansatz* gewählt werden. Dieser Ansatz betrachtet das poröse Material in einer homogenisierten Form und vernachlässigt die zwei einzelnen Phasen. Er basiert darauf, dass die äquivalente Schallgeschwindigkeit c_{eq} im porösen Material durch eine effektive Dichte $\rho_e(\omega)$ und einen effektiven Kompressionsmodul $K_e(\omega)$ beschrieben werden, die beide frequenzabhängig sind. Folglich bildet dieser Ansatz eine einzige Dichtewelle im äquivalenten Fluid ab.

$$c_{eq} = \sqrt{\frac{K_e(\omega)}{\rho_e(\omega)}} \quad (2.39)$$

Die Helmholtz-Gleichung (Gl. 2.35) modifiziert sich entsprechend zu

$$\Delta p + \omega^2 \frac{\rho_e(\omega)}{K_e(\omega)} p = 0. \quad (2.40)$$

Ein gebräuchlicher äquivalenter Fluid-Ansatz ist der nach Champoux und Allard [28]. Zur Bestimmung von effektiver Dichte und effektivem Kompressionsmodul werden die charakteristischen Parameter des Materials herangezogen: Porosität ϕ , Strömungswiderstand σ , Tortuosität a_∞ , viskose charakteristische Länge Λ und thermale charakteristische Länge Λ' . Ausführungen zu den Parametern geben beispielsweise [3, 28, 79].

2.4.2 Poroelastische Materialien

Für eine Vielzahl akustischer Anwendungen kann ein äquivalenter Fluid-Ansatz zur Modellierung als ausreichend angesehen werden. In anderen Fällen ist die Wirkung der elastischen Festkörperphase eines porösen Materials nicht zu vernachlässigen, insbesondere wenn es um das Schwingungsverhalten von Bauteilen und dessen Dämpfung geht. Die Festkörperphase ermöglicht nämlich die Übertragung von transversalen Komponenten einer Welle und beeinflusst so die in einem Bauteil auftretenden Schwingungen. Poröse Medien, bei deren Betrachtung das Verhalten sowohl der Fluid- als auch der Festkörperphase einbezogen wird, werden als *poroelastische* Materialien bezeichnet.

Im Rahmen dieser Arbeit kommt ein poroelastisches Materialmodell zu Anwendung, da dieses geeignet ist, alle bei der Betrachtung von Körperschall relevanten Phänomene wiederzugeben.

Poroelastische Materialformulierung nach Biot Die Theorie zur Modellierung eines sogenannten poroelastischen Materials geht auf Biot [18, 19] zurück. Sie umfasst die Bewegungen der Fluid- als auch der Festkörperphase und berücksichtigt die gegenseitigen Wechselwirkungen. Drei Wellen werden im Material abgebildet: je eine Dichtewelle in jeder Phase und eine Schubwelle der elastischen Festkörperphase.

Biots Beschreibung basiert auf der Darstellung der Bewegungsgleichungen über die Verschiebungen der Festkörperphase \mathbf{u}^s und die der Fluidphase \mathbf{u}^f (siehe auch [3, 40]) und kommt sowohl in dieser Form mit sechs Freiheitsgraden zur Anwendung [74, 104, 105] als auch in Modifikationen mit fünf [65] oder vier Freiheitsgraden [6, 9]. Letztere setzt sich aus den Verschiebungen der Festkörperphase \mathbf{u}^s und dem Wechseldruck (akustischem Druck) im Fluid p^f zusammen.

Biot leitet zunächst die Spannungsdehnungsbeziehungen basierend auf der Existenz potentieller Energie aus Verformungen her. Unter der Annahme eines isotropen poroelastischen Materials ergeben sich vier Parameter, über die der Spannungstensor σ_{ij} der Festkörper- und der Fluidphase mit dem Dehnungstensor ε_{ij} beider Phasen gekoppelt ist.

$$\sigma_{ij}^s = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \sigma_{ij}^f = \begin{bmatrix} -\phi p^f & 0 & 0 \\ 0 & -\phi p^f & 0 \\ 0 & 0 & -\phi p^f \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^s = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^f = \begin{bmatrix} \varepsilon^f & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^f & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^f \end{bmatrix}$$

Die Einträge im Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ ergeben sich unter Annahme kleiner Deformationen jeweils aus

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^s}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Die Spannungsdehnungsbeziehung im Biot-Modell liefert

$$\sigma_{ij}^s = \left[(P - 2N)\varepsilon_{kk}^s + Q\varepsilon_{kk}^f \right] \delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij}^s, \quad (2.41)$$

$$\sigma_{ij}^f = \left[Q\varepsilon_{kk}^s + R\varepsilon_{kk}^f \right] \delta_{ij}, \quad (2.42)$$

mit $k = 1, 2, 3$ in der Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention (Summation über sich wiederholende Indizes). Mit Hilfe von drei Gedankenexperimenten (poroelastisches Material unter reiner Schubbelastung, Druckbelastung der Festkörperphase bei konstantem Druck der Fluidphase, Druckbelastung der Festkörper- und Fluidphase, siehe [3]) lassen sich die Parameter N , P , Q und R ermitteln. N ergibt sich zur zweiten Laméschen Konstanten η , dem Schubmodul G ; P stellt eine Kombination beider Laméscher Konstanten λ , η dar ($P = \lambda - 2\eta$). Q ist ein Koeffizient zur Kopplung von Verschiebungen und Spannungen beider Phasen, und R ist der Kompressionsmodul des Fluidanteils ϕ im poroelastischen Material [9].

Wird das Material der Festkörperphase als inkompressibel angenommen, das heißt, sein Kompressionsmodul K_s wird als unendlich angesehen beziehungsweise das Verhältnis von Kompressionsmodul des poroelastischen Materials K_b zu Kompressionsmodul der Festkörperphase sei klein ($K_b/K_s \ll 1$), lassen sich folgende Ausdrücke bestimmen.

$$P = \frac{4}{3}N + K_b + \frac{(1-\phi)^2}{\phi}K_f \quad (2.43)$$

$$Q = K_f(1 - \phi) \quad (2.44)$$

$$R = \phi K_f \quad (2.45)$$

Die vollständigen Ausdrücke ohne Annahme einer inkompressiblen Festkörperphase nach [3] sind im Anhang A gegeben. Der Kompressionsmodul K_b für das poroelastische Material ermittelt sich zu

$$K_b = \frac{2G(\nu + 1)}{3(1 - \nu)}. \quad (2.46)$$

Der Kompressionsmodul der Fluidphase K_f ist ein frequenzabhängiger Wert, der sich aus dem Ansatz des äquivalenten Fluids ergibt. K_f berechnet sich zu

$$K_f = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1)(\alpha'(\omega))^{-1}}, \quad (2.47)$$

wobei P_0 den Umgebungsdruck (für Luft $1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$) darstellt und der Isentropenexponent γ das Verhältnis von spezifischer Wärmekapazität bei konstantem Druck zu jener bei konstantem Volumen (für Luft $\gamma = 1,4$). Die Funktion $\alpha'(\omega)$ berücksichtigt die dynamische viskose Permeabilität und berechnet sich nach Champoux und Allard [28] zu

$$\alpha'(\omega) = \frac{8\mu}{i\omega\rho_f\text{Pr}\Lambda'^2} \left(1 + \frac{i\omega\rho_f\text{Pr}\Lambda'^2}{16\mu} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \quad (2.48)$$

mit der Prandtlzahl Pr von 0,71 und den Stoffkonstanten dynamische Viskosität μ und Dichte ρ_f des Fluids.

Biot definiert die kinetische Energie bezogen auf ein Einheitsvolumen mittels der Verschiebungen der Festkörper- und der Fluidphase (\mathbf{u}^s beziehungsweise \mathbf{u}^f) und dreier Dichtekoeffizienten.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\rho_{11} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial t} \right)^2 + \rho_{12} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}^f}{\partial t} \right) + \rho_{22} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^f}{\partial t} \right)^2 \quad (2.49)$$

Durch partielle Ableitung nach jeweils der Festkörper- beziehungsweise Fluidgeschwindigkeit ($\partial/\partial \dot{\mathbf{u}}^s = \partial/(\partial \mathbf{u}^s/\partial t)$) und der Zeit ($\partial/\partial t$) ergeben sich die Kräfte pro Einheitsvolumen, die auf die Festkörperphase beziehungsweise auf das Fluid wirken.

$$f_i^s = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{u}_i^s} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_i^s + \rho_{12} u_i^f) \quad (2.50)$$

$$f_i^f = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{u}_i^f} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u_i^s + \rho_{22} u_i^f) \quad (2.51)$$

Durch gedankliches Gleichsetzen der Festkörper- und der Fluidgeschwindigkeiten ($\dot{\mathbf{u}}^s = \dot{\mathbf{u}}^f$) lassen sich die Dichtekoeffizienten bestimmen.

$$\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12} = \rho_s(1 - \phi) + \phi\rho_f(\alpha_\infty - 1) \quad (2.52)$$

$$\rho_{12} = -\phi\rho_f(\alpha_\infty - 1) \quad (2.53)$$

$$\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12} = \alpha_\infty\phi\rho_f \quad (2.54)$$

ρ_1 stellt die Dichte der Festkörperphase des poroelastischen Mediums dar und ergibt sich aus der Porosität ϕ und der Dichte des Festkörpermaterials ρ_s ($\rho_1 = (1 - \phi)\rho_s$). ρ_2 beschreibt die Dichte der Fluidphase im poroelastischen Material in Abhängigkeit der Porosität ϕ und der Fluiddichte ρ_f ($\rho_2 = \phi\rho_f$). Der Dichtekoeffizient $-\rho_{12}$ wird auch als Trägheitskopplungsterm ρ_a bezeichnet.

Unter der Annahme von zeitharmonischem Verhalten

$$\mathbf{u}^s = \hat{\mathbf{u}}^s e^{i\omega t} \quad \mathbf{u}^f = \hat{\mathbf{u}}^f e^{i\omega t} \quad (2.55)$$

lassen sich die Ausdrücke für die Volumenkräfte der einzelnen Phasen (Gl. 2.50 und 2.51) unter Verzicht der Kennzeichnung der Amplituden durch $\hat{}$ umformen zu

$$f_i^s = -\omega^2 \rho_{11} \hat{u}_i^s - \omega^2 \rho_{12} \hat{u}_i^f \text{ und} \quad (2.56)$$

$$f_i^f = -\omega^2 \rho_{12} u_i^s - \omega^2 \rho_{22} u_i^f. \quad (2.57)$$

Die Volumenkräfte f_i^s und f_i^f entsprechen den jeweiligen Divergenzen des zugehörigen Spannungstensors (Gl. 2.41 und 2.42), so dass sich zwei Bewegungsgleichungen aus der Kombination mit Gleichungen 2.56 und 2.57 aufstellen lassen.

$$\omega^2 \rho_{11} u_i^s + \omega^2 \rho_{12} u_i^f + \sigma_{ij,j}^s = 0 \quad (2.58)$$

$$\omega^2 \rho_{12} u_i^s + \omega^2 \rho_{22} u_i^f - \phi p_{,i}^f = 0 \quad (2.59)$$

Ist das Fluid im poroelastischen Material viskos, erfolgt die Berücksichtigung der Dämpfungseffekte durch die dynamische Tortuosität $\tilde{\alpha}(\omega)$ (siehe [79]), die den Aufstellungen zum äquivalenten Fluid-Ansatz entspricht:

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha_\infty + \frac{\phi \sigma}{i \omega \rho_f} \cdot G(\omega) \quad (2.60)$$

mit

$$G(\omega) = \left(1 + \frac{4\alpha_\infty^2 \mu i \omega \rho_f}{\sigma^2 \phi^2 \Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.61)$$

Die Bewegungsgleichungen 2.58 und 2.59 ändern sich zu

$$\omega^2 \tilde{\rho}_{11} u_i^s + \omega^2 \tilde{\rho}_{12} u_i^f + \sigma_{ij,j}^s = 0 \quad (2.62)$$

$$\omega^2 \tilde{\rho}_{12} u_i^s + \omega^2 \tilde{\rho}_{22} u_i^f - \phi p_{,i}^f = 0 \quad (2.63)$$

mit

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_1 - \rho_{12} - \frac{i \sigma \phi^2}{\omega} G(\omega) \quad (2.64)$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} + \frac{i \sigma \phi^2}{\omega} G(\omega) \quad (2.65)$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \rho_2 - \rho_{12} - \frac{i \sigma \phi^2}{\omega} G(\omega) \quad (2.66)$$

(u,p)-Formulierung des Modells nach Biot Atalla *et al.* [9] gelangen zu einer Formulierung für die Bewegungsgleichungen des poroelastischen Materials, die als Unbekannte die Verschiebungen der Festkörperphase \mathbf{u}^s und den Wechseldruck der Fluidphase p^f enthält. Dazu werden die Fluidverschiebungen \mathbf{u}^f durch Gleichung 2.63 ausgedrückt.

$$u_i^f = \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i}^f - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i^s \quad (2.67)$$

Die Abhängigkeit des Spannungstensors der Festkörperphase von den Verschiebungen beider Phasen ($\sigma^s = \sigma^s(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^f)$), siehe Gleichung 2.41) lässt sich eliminieren, indem die Gleichungen für die Spannungstensoren σ_{ij}^s (Gl. 2.41) und σ_{ij}^f (Gl. 2.42) kombiniert werden.

$$\sigma_{ij}^s(u_i^s, u_i^f) = \hat{\sigma}_{ij}^s(u_i^s) - \phi \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} p \delta_{ij} \quad (2.68)$$

Eine Tilde \sim bezeichnet dabei die Parameter Q und R in ihrer generellen Form, das heißt ohne die vereinfachenden Annahmen für Gleichungen 2.43 – 2.45 (siehe [3, 9]). $\hat{\sigma}_{ij}^s(u_i^s)$ ist der Spannungstensor der Festkörperphase im Vakuum mit

$$\hat{\sigma}_{ij}^s = (K_b - \frac{2}{3}N)u_{k,k}^s \delta_{ij} + 2N\epsilon_{ij}^s. \quad (2.69)$$

Die (u, p) -Bewegungsgleichung für die Festkörperphase des poroelastischen Materials (Gl. 2.62) ergibt sich dann unter Verzicht der Kennzeichnung f für den Porendruck zu

$$\hat{\sigma}_{ij,j}^s + \tilde{\rho}\omega^2 u_i^s + \tilde{\gamma}p_{,i} = 0 \quad (2.70)$$

mit

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \frac{(\tilde{\rho}_{12})^2}{\tilde{\rho}_{22}} \quad (2.71)$$

und

$$\tilde{\gamma} = \phi \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right). \quad (2.72)$$

Die Bewegungsgleichung für die Fluidphase ergibt sich aus Bildung der Divergenz von Gleichung 2.67 und Kombination mit der umgeschriebenen Gleichung 2.42

$$\sigma_{ij}^f = -\phi p^f \delta_{ij} = \tilde{R}u_{k,k}^f \delta_{ij} + \tilde{Q}u_{k,k}^s \delta_{ij} \quad (2.73)$$

und lautet in der (u, p) -Formulierung

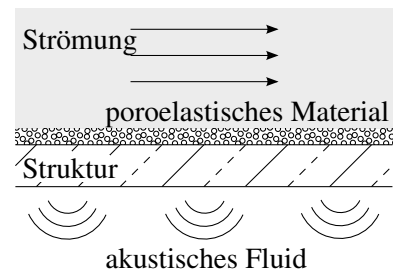
$$p_{,ii} + \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}}\omega^2 p - \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2}\tilde{\gamma}\omega^2 u_{i,i}^s = 0 \quad (2.74)$$

Während sich vorgenannte Gleichungen auf die Bewegungen in einem Volumen beziehen, kommt die Theorie nach Biot auch bei der Modellierung poroelastischer Platten zur Anwendung [52, 101].

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung poroelastischen Materialverhaltens gibt die Theorie poröser Medien. Sie berücksichtigt neben dem Konzept der Volumenanteile, den kinematischen Verformungen und den Erhaltungssätzen auch thermodynamische Restriktionen und konstitutive Gleichungen [40, 50] und kann auch plastisches Verhalten abbilden [22]. Im Bereich linearen Materialverhaltens ergeben sich aus beiden Theorien ähnliche Formulierungen [114].

3 Simulation

Im vorangegangenen Kapitel sind die einzelnen Modelle für die Komponenten Strömung, poroelastisches Material, Struktur und akustisches Fluid vorgestellt worden. Die mathematischen Gleichungen dieser Modelle lassen sich jedoch in den allerwenigsten Fällen analytisch lösen, so dass für das hier vorgestellte Verfahren zur Abbildung von strömungsinduziertem Körperschalleintrag und dessen Weiterleitung die Lösung der beschreibenden Gleichungen mittels numerischer Approximation verfolgt wird.



In diesem Kapitel werden die zum Einsatz kommenden numerischen Verfahren erläutert, die die einzelnen Teilkomponenten und deren Modellverhalten simulieren. Es handelt sich dabei um etablierte Verfahren, für die die Umsetzung der Modellgleichungen aus Kapitel 2 dargestellt wird. Alle hier gewählten Verfahren führen auf lineare Gleichungssysteme, die mittels direkter oder iterativer Methoden zur Lösung gebracht werden.

3.1 Finite-Volumen-Methode (FVM)

Zur Simulation der Teilkomponente Strömung wird im Rahmen dieser Arbeit die Finite-Volumen-Methode angewendet. Im Bereich der numerischen Strömungsmechanik findet dieses Verfahren in der Praxis häufig Anwendung, da es eine konservative Methode darstellt [53] und durch die schwache Formulierung Unregelmäßigkeiten in der Lösung abschwächt und numerische Robustheit gewährleistet [88]. Zudem ermöglicht der zellorientierte Ansatz die Diskretisierung beliebiger Geometrien, was mittels des Finiten-Differenzen-Verfahrens nur aufwendig möglich ist.

Unabhängig davon, welches Diskretisierungsverfahren zur numerischen Strömungssimulation gewählt wird, ist den Methoden gemein, dass sowohl eine diskrete Beschreibung im Raum als auch in der Zeit erforderlich ist. Die zugrundeliegenden Ansätze werden hier kurz erläutert, ebenso wie die Berücksichtigung der zeitlichen Komponente in der numerischen Simulation, bevor die Aufstellung des Gleichungssystems für die FVM dargestellt wird.

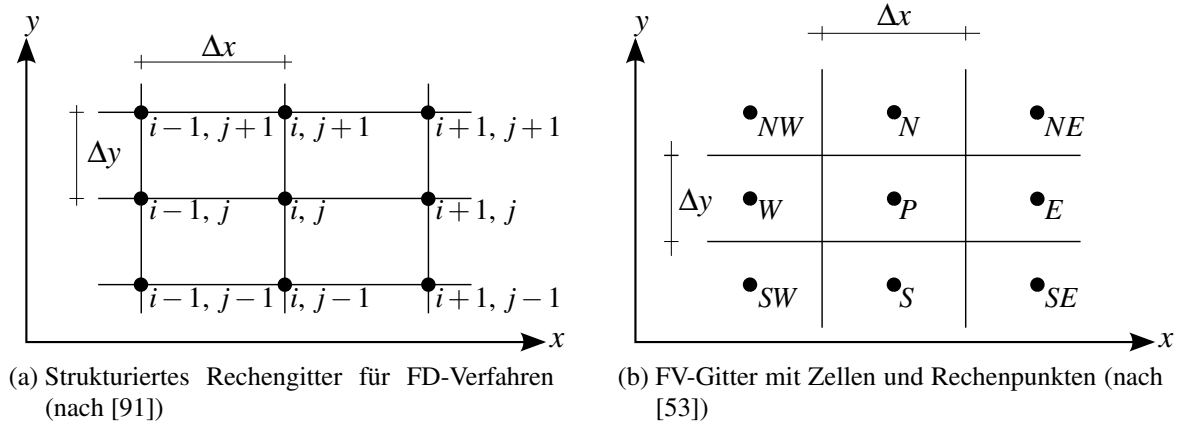


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung von Diskretisierungen

3.1.1 Räumliche Diskretisierung

Für die räumliche Diskretisierung wird das betrachtete Gebiet in ein Netz aus Gitterpunkten oder aus Zellen zerlegt. Finite-Differenzen-Verfahren (FD-Verfahren) benötigen ein strukturiertes Punktegitter, während für Finite-Volumen-Verfahren (FV-Verfahren) der Bereich in sogenannte Kontrollvolumen aufgeteilt ist, in deren Zentrum sich jeweils ein Rechenpunkt befindet. Abbildung 3.1 zeigt schematisch für den zweidimensionalen Fall die Diskretisierung unter Angabe der üblichen Bezeichnungen (Indizierung für FD-Methode, Kompassrichtungen für FV-Ansatz).

Das Ziel beider Verfahren ist die Aufstellung der Erhaltungsgleichungen für jeden Rechenpunkt. Die Navier-Stokes-Gleichungen enthalten jedoch Ableitungen, so dass eine Diskretisierung der Ableitungen erforderlich ist. Im Folgenden wird dies anhand der Rechenpunkte einer FD-Diskretisierung dargestellt.

Die Diskretisierung der 1. Ableitung erfolgt mittels einer Taylor-Reihenentwicklung. Beispielsweise lässt sich die Geschwindigkeit v an einem Gitterpunkt $(i+1, j)$ in x -Richtung danach beschreiben zu

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + (\Delta x) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \dots \quad (3.1)$$

Durch Umformung ergibt sich der Ausdruck für das Differential

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \dots \quad (3.2)$$

Nur der erste Term auf der rechten Seite wird zur Beschreibung der partiellen Ableitung herangezogen, so dass der Abbruchfehler von der Größe Δx ist und damit 1. Ordnung. Die Vorwärtsdifferenz 1. Ordnung ergibt sich zu

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.3)$$

Ebenso bildet sich die Rückwärtsdifferenz 1. Ordnung.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.4)$$

Die zentrale Differenz kann durch Subtraktion der Taylor-Reihen $v_{i+1,j} - v_{i-1,j}$ aufgestellt werden und ist 2. Ordnung genau.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (3.5)$$

Für allgemeine (kommerzielle) Anwendungen ist eine Genauigkeitsordnung von zwei ausreichend [91]. Höhere Genauigkeitsordnungen sind möglich unter Einbeziehung weiterer Rechenpunkte.

Zweite Ableitungen lassen sich durch die Addition der Taylorreihenentwicklung für $v_{i+1,j}$ und $v_{i-1,j}$ erstellen. Sie beziehen einen beziehungsweise bei gemischten Ableitungen zwei Rechenpunkte mehr ein und sind 2. Ordnung genau.

Ist die Kenntnis von Werten an anderen Stellen als den Rechenpunkten notwendig, ist eine Interpolation erforderlich. Mehrere Verfahren mit unterschiedlichem Aufwand und Genauigkeit bieten sich an. Das einfachste ist das sogenannte Aufwind-Verfahren (*upwind*), das die Strömungsrichtung berücksichtigt und einer Interpolationsstelle denjenigen Wert zuweist, den die Strömung am nächsten Rechenpunkt stromauf annimmt. Die lineare Interpolation stellt ebenfalls eine unkomplizierte Methode da. Interpolationen höherer Ordnung funktionieren unter Berücksichtigung weiterer Rechenpunkte.

3.1.2 Zeitliche Diskretisierung

Für instationäre Problemstellungen ist auch die Zeit zu diskretisieren. Dazu dienen Zeitebenen $n-1$, n , $n+1$, die analog zur räumlichen Diskretisierung eingeführt werden. Abbildung 3.2 zeigt die Zeitebenen für die Rechenpunkte eines FD-Gitters in x -Richtung.

Die Diskretisierung der zeitlichen Ableitung $\partial/\partial t$ erfolgt analog zur räumlichen Diskretisierung. Die zeitliche Vorwärtsdifferenz 1. Ordnung ermittelt sich zu

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_i^n = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (3.6)$$

wobei der hochgestellte Index die Zeitebene bezeichnet. Der Ausdruck für die zeitliche zentrale Differenz 2. Ordnung ist

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_i^n = \frac{v_i^{n+1} - v_i^{n-1}}{2 \cdot \Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \quad (3.7)$$

Das Einsetzen der räumlich und zeitlich diskretisierten Ableitungen in die Navier-Stokes-Gleichungen liefert die sogenannte *Differenzengleichung*. Anstelle partieller Ableitungen befinden sich nun diskrete Werte von v_i und p für die Punkte des Gitters in den Gleichungen, so dass eine Formulierung als einfache Gleichung möglich wird.

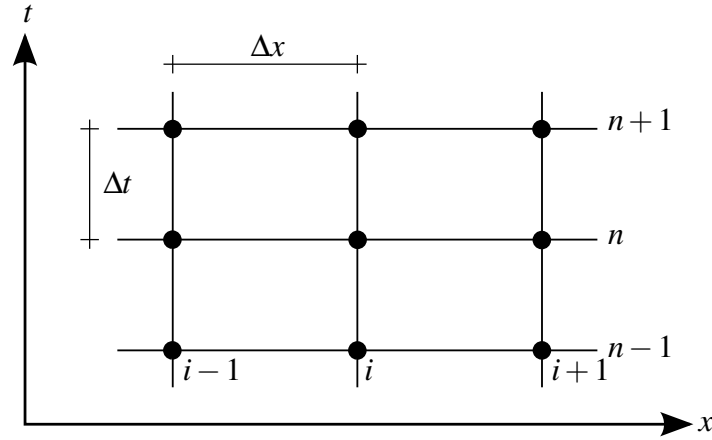


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der zeitlichen Diskretisierung (nach [91])

Von besonderer Relevanz für transiente Simulationen ist die Kombination der verschiedenen Zeitebenen in der Differenzengleichung. Von dieser Kombination hängt die Genauigkeit und Konvergenz des Verfahrens und ebenso seine Komplexität ab.

Die Anzahl der für die neue Zeitebene zu bestimmenden Werte ist entscheidend für die Unterscheidung in explizite und implizite Formulierungen. Bei einem expliziten Verfahren (auch als *Vorwärts-Euler-Methode* bezeichnet) ist lediglich eine Größe in der neuen Zeitebene $n+1$ vorhanden, während alle anderen Größen der Zeitebene n entstammen. Dieses erreicht man beispielsweise dadurch, dass die Navier-Stokes-Gleichungen (Gl. 2.12, 2.13) für die Zeitebene n formuliert werden und lediglich in der diskretisierten zeitlichen Ableitung (Gl. 3.6) die neue Zeitebene $n+1$ auftritt.

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^n = 0 \quad (3.8)$$

$$\rho \left(\frac{v_i^{n+1} - v^n}{\Delta t} + v_j^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^n \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^n + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right)^n \quad (3.9)$$

Der Vorteil ist, dass die gesuchten Größen explizit berechnet werden können. Der Nachteil liegt in der Stabilität des Verfahrens, das kleine Zeitschritte Δt erfordert sowie eine hohe Anzahl an Iterationen, bis Konvergenz erreicht ist.

Implizite Verfahren (*Rückwärts-Euler-Methode*) formulieren die Navier-Stokes-Gleichungen so, dass mehrere Größen auf der neuen Zeitebene $n+1$ enthalten sind. Werden beispielsweise alle Terme implizit behandelt, ergibt sich

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^{n+1} = 0 \quad (3.10)$$

$$\rho \left(\frac{v_i^{n+1} - v^n}{\Delta t} + v_j^{n+1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^{n+1} \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{n+1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right)^{n+1}. \quad (3.11)$$

Bei impliziter Betrachtung lassen sich die gesuchten Größen der Zeitebene $n+1$ nicht direkt bestimmen, sondern erfordern die Lösung eines Gleichungssystems. Die iterative Lö-

sung dieses Gleichungssystems ist je Iterationsschritt aufwendiger, aber der Zeitschritt Δt kann weitaus größer gewählt werden, so dass Gesamtrechnenzeiten im Vergleich zu einem expliziten System oft niedriger sind. Detaillierte Ausführungen zu Stabilität und möglichen Vorgehensweisen gibt [91]. Weitere implizite Methoden beruhen beispielsweise auf der Mittelpunkts- oder Trapezregel (letzteres ist als *Crank-Nicholsen-Verfahren* bekannt).

Bei inkompressiblen Strömungen ergibt sich das Problem der Druckbestimmung, da der Druck nur als räumliche Ableitung in die Navier-Stokes-Gleichungen eingeht. Als üblicher Ansatz zur Druckberechnung hat sich die SIMPLE-Methode (*semi implicit method for pressure linked equations*) bewährt. Sie beruht darauf, dass die Kontinuitätsgleichung für die neue Zeitebene $n + 1$ aufgestellt wird und in der Impulsgleichung (neben der zeitlichen Ableitung) den Druck für die Zeitebene $n + 1$ anzusetzen. Ausgehend von einem gegebenen Druckfeld werden zunächst vorläufig die Geschwindigkeiten v_i berechnet und damit die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung überprüft. Ist dies nicht der Fall, erfolgt eine Druckkorrektur. Anschließend wird die Impulsgleichung erneut ausgewertet und die Kontinuitätsgleichung getestet, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist [88].

3.1.3 Schwache Form und Aufstellung des Gleichungssystems

Der Finite-Volumen-Methode liegt die integrale (schwache) Formulierung der beschreibenden Differentialgleichungen zugrunde.

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_V -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} dV \quad (3.12)$$

Das zu betrachtende Volumen V wird durch Diskretisierung in N_e Kontrollvolumen (Zellen) aufgeteilt.

$$V = \sum_{e=1}^{N_e} V_e \quad (3.13)$$

Die Indizes beziehen sich hier auf die Zelle. Innerhalb einer Zelle sind die Größen für Geschwindigkeit v_i und Druck p konstant.

Die integrale Darstellung (Gl. 3.12) ist auch als Summe über alle Zellen erfüllt.

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{V_e} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} dV + \int_{V_e} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \right) = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{V_e} -\frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_{V_e} \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} dV \right) \quad (3.14)$$

Die schwache Formulierung wird nun verstärkt, indem gefordert wird, dass für jede einzelne Zelle die Erhaltungsgleichungen erfüllt sein müssen.

$$\int_{V_e} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} dV + \int_{V_e} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \int_{V_e} -\frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_{V_e} \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} dV \quad (3.15)$$

Im Folgenden werden die einzelnen Integrale so aufgelöst, dass sie sich durch Größen an den Rechenpunkten (das sind im Allgemeinen die Zellmittelpunkte bei FV-Gittern) ausdrücken

lassen. Zunächst wird im instationären Term die zeitliche Ableitung $\partial/\partial t$ durch eine Vorwärtsdifferenz (Gl. 3.6) ersetzt, so dass Größen aus zwei Zeitebenen auftreten: v_i^{n+1} und v_i .

Der konvektive Term wird mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes [88] von einem Volumenintegral in ein Flächenintegral überführt. Der Integrand kann dann als ein Fluss über die Ränder des Elements verstanden werden [122]. Die Integration über die Flächen der Ränder liefert letztendlich einen Ausdruck, in den die Geschwindigkeit v_i in der betrachteten Zelle V_e sowie die Geschwindigkeiten der benachbarten Zellen eingehen.

Auf die gleiche Weise lässt sich der Diffusionsterm auswerten. Die Anwendung des Gaußschen Satzes reduziert das Integral um eine Dimension. Die Integration erfolgt wieder über die Flächen der Zellwände.

Nach der Auswertung des Druckterms durch die Verwendung einer Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenz für den Druckgradienten und Integration über das Zellvolumen können die Erhaltungsgleichung für die betrachtete Zelle unter Einbeziehungen von Rechenpunkten benachbarter Kontrollvolumen aufgestellt werden. Zusammenfassen der Gleichungen für alle Kontrollvolumen führt auf ein lineares Gleichungssystem. Eine detaillierte Darstellung gibt [122].

Zur Lösung des Gleichungssystems sind Anfangs- und Randbedingungen vorzugeben. Dieses geschieht durch Vorgabe der Flüsse auf den Rändern des Diskretisierungsgebiets. Für undurchlässige Wände beträgt der Fluss über den Rand Null, bei Einströmrändern wird der bekannte Fluss vorgegeben. Zum Teil sind die Flüsse über Approximationen zu berechnen, indem die Werte der angrenzenden Zellen berücksichtigt werden.

Die Lösung des je Zeitschritt aufgebauten Gleichungssystems erfolgt im Allgemeinen durch Prädiktionierung und iterative Gleichungslöser.

3.2 Finite-Element-Methode (FEM)

Die Finite-Elemente-Methode als Standardwerkzeug zur Struktursimulation bringt den Vorteil mit sich, auf ein schwach besetztes Gleichungssystem zu führen, das sich effizient lösen lässt.

Sind plattenartige Bauteile zu simulieren, so kann ein zweidimensionaler Ansatz gewählt werden, was den Rechenaufwand gegenüber einer dreidimensionalen Beschreibung senkt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die FEM für die Plattentheorie nach Mindlin formuliert, so dass eine Abbildung Platten mittlerer Dicke ermöglicht wird. In den folgenden Abschnitten werden zunächst die FE-Formulierungen für Biegeschwingungen und in-plane-Schwingungen vorgestellt, bevor eine Kombination der beiden zu einer Schalenbeschreibung erfolgt.

Im Weiteren wird die FEM für poroelastische Materialien vorgestellt. Hierbei handelt es sich um eine Formulierung im Dreidimensionalen, die auf der Theorie nach Biot aufbaut.

3.2.1 FEM für Biegeschwingungen einer Mindlin-Platte

Die Biegeschwingungen einer Platte lassen sich durch die in Kapitel 2.2 aufgestellten Gleichungen (Gl. 2.25 – 2.27) beschreiben. Die Freiwerte dieser Gleichungen sind die Durchbiegung in z -Richtung \hat{u}_z und die Drehwinkel $\hat{\phi}_x$ und $\hat{\phi}_y$. Für jede der genannten Gleichungen ist das Residuum zu minimieren. Dazu werden sie in ihre schwache Form gebracht, indem sie mit einer

Wichtungsfunktion \tilde{g} multipliziert und über die Fläche der Platte integriert werden.

Unter Berücksichtigung der partiellen Integration (Anwendung der 1. Greenschen Identität) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$Ghk_S \left(- \int \tilde{g}_{,x} \hat{u}_{z,x} dx dy - \int \tilde{g}_{,y} \hat{u}_{z,y} dx dy - \int \tilde{g}_{,x} \hat{\phi}_x dx dy - \int \tilde{g}_{,y} \hat{\phi}_y dx dy \right) + \omega^2 \rho h \int \tilde{g} \hat{u}_z dx dy + \int \tilde{g} \hat{p}_z dx dy = 0, \quad (3.16)$$

$$-GI \int \tilde{g}_{,y} \hat{\phi}_{x,y} dx dy - B \int \tilde{g}_{,x} \hat{\phi}_{x,x} dx dy - \frac{1+\nu}{2} B \int \tilde{g}_{,x} \hat{\phi}_{y,y} dx dy - Ghk_S \int (\tilde{g}_{,x} \hat{u}_z + \tilde{g} \hat{\phi}_x) dx dy + \omega^2 \rho I \int \tilde{g} \hat{\phi}_x dx dy = 0, \quad (3.17)$$

$$-GI \int \tilde{g}_{,x} \hat{\phi}_{y,x} dx dy - B \int \tilde{g}_{,y} \hat{\phi}_{y,y} dx dy - \frac{1+\nu}{2} B \int \tilde{g}_{,y} \hat{\phi}_{x,x} dx dy - Ghk_S \int (\tilde{g}_{,y} \hat{u}_z + \tilde{g} \hat{\phi}_y) dx dy + \omega^2 \rho I \int \tilde{g} \hat{\phi}_y dx dy = 0, \quad (3.18)$$

Werden die Verformungen \hat{u}_z , $\hat{\phi}_x$ und $\hat{\phi}_y$ elementweise über Ansatzfunktionen N_i und die Verformungsgrößen $(u_z)_i$, $(\phi_x)_i$ und $(\phi_y)_i$ an den n Knoten eines Elements angenähert

$$\hat{u}_z = \sum_{i=1}^n N_i (u_z)_i, \quad \hat{\phi}_x = \sum_{i=1}^n N_i (\phi_x)_i, \quad \hat{\phi}_y = \sum_{i=1}^n N_i (\phi_y)_i \quad (3.19)$$

und für die Wichtungsfunktion \tilde{g} die Ansatzfunktion N verwendet (Methode von Galerkin)

$$\tilde{g}_i = N_i \quad (3.20)$$

lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen, dessen Unbekannte die Verformungen an den Knoten sind. Bezogen auf die gesamte Platte und die einzelnen Verschiebungen für alle Knoten der Platte lautet das Gleichungssystem

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_z \\ \boldsymbol{\phi}_x \\ \boldsymbol{\phi}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_z \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Knotenweise ergeben sich die einzelnen Elementbeiträge für die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} zu

$$\begin{aligned} K_{ik}^{11} &= Ghk_S \int_A N_{i,x} N_{k,x} + N_{i,y} N_{k,y} dA, \\ K_{ik}^{12} &= K_{ik}^{21} = Ghk_S \int_A N_{i,x} N_k dA, \\ K_{ik}^{13} &= K_{ik}^{31} = Ghk_S \int_A N_{i,y} N_k dA, \\ K_{ik}^{22} &= GI \int_A N_{i,y} N_{k,y} dA + B \int_A N_{i,x} N_{k,x} dA + Ghk_S \int_A N_i N_k dA \\ K_{ik}^{23} &= K_{ik}^{32} = \frac{1+\nu}{2} B \int_A N_{i,x} N_{k,y} dA, \\ K_{ik}^{33} &= GI \int_A N_{i,x} N_{k,x} dA + B \int_A N_{i,y} N_{k,y} dA + Ghk_S \int_A N_i N_k dA, \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei die Indizes i und k jeweils über die Knoten eines Elements laufen und über diese zu summieren ist. Die Einträge für die Massenmatrix sind

$$M_{ik}^{11} = \rho h \int_A N_i N_k dA \quad \text{und} \quad M_{ik}^{22} = M_{ik}^{33} = \rho I \int_A N_i N_k dA. \quad (3.23)$$

Der Lastvektor \mathbf{f}_z einer beliebigen in z -Richtung orientierten Flächenlast lautet

$$\mathbf{f}_z = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p}_z dA, \quad (3.24)$$

wenn \mathbf{p}_z die Lastordinaten an den Knoten beinhaltet und $\mathbf{N} = [N_1 \dots N_n]^T$ die gewählten Ansatzfunktionen.

3.2.2 FEM für in-plane-Schwingungen einer Scheibe

Die Gleichungen 2.23 und 2.24 beschreiben die in-plane-Schwingungen in einem plattenartigen Bauteil. Die Herleitung der FEM für eine solche Scheibe erfolgt analog zum vorigen Abschnitt, indem die Methode der gewichteten Residuen angewandt wird. Die Freiwerte sind hier die Auslenkungen in Plattenebene \hat{u}_x und \hat{u}_y . Die Gleichungen in ihrer schwachen Form ergeben sich zu

$$\begin{aligned} -\frac{Eh}{1-\nu^2} \int \tilde{g}_{,x} \hat{u}_{x,x} dxdy - Gh \int \tilde{g}_{,y} \hat{u}_{x,y} dxdy - \frac{1+\nu}{1-\nu} Gh \int \tilde{g}_{,y} \hat{u}_{y,y} dxdy + \\ \omega^2 \rho h \int \tilde{g} \hat{u}_x dxdy = - \int \tilde{g} \hat{p}_x dxdy, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} -\frac{Eh}{1-\nu^2} \int \tilde{g}_{,x} \hat{u}_{y,x} dxdy - Gh \int \tilde{g}_{,y} \hat{u}_{y,y} dxdy - \frac{1+\nu}{1-\nu} Gh \int \tilde{g}_{,y} \hat{u}_{x,y} dxdy + \\ \omega^2 \rho h \int \tilde{g} \hat{u}_y dxdy = - \int \tilde{g} \hat{p}_y dxdy. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Unter Verwendung der Ansatzfunktionen N_i sowohl für die Freiwerte \hat{u}_x und \hat{u}_y in Verbindung mit den Verschiebungen $(u_x)_i$ und $(u_y)_i$ der n Elementknoten

$$\hat{u}_x = \sum_{i=1}^n N_i (u_x)_i, \quad \hat{u}_y = \sum_{i=1}^n N_i (u_y)_i, \quad (3.27)$$

als auch für die Wichtungsfunktion \tilde{g} (Gl. 3.19) bildet sich das Gleichungssystem für die Gesamtscheibe zu

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Die einzelnen Elementbeiträge sind

$$M_{ik}^{11} = M_{ik}^{22} = \rho h \int_A N_i N_k dA \quad (3.29)$$

sowie

$$\begin{aligned} K_{ik}^{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_A N_{i,x} N_{k,x} dA + Gh \int_A N_{i,y} N_{k,y} dA, \\ K_{ik}^{12} &= K_{ik}^{21} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_A N_{i,x} N_{k,y} dA + Gh \int_A N_{i,y} N_{k,x} dA, \\ K_{ik}^{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_A N_{i,y} N_{k,y} dA + Gh \int_A N_{i,x} N_{k,x} dA. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Lastvektoren \mathbf{f}_x und \mathbf{f}_y ergeben sich analog aus in x - beziehungsweise y -Richtung wirkenden Flächenlasten auf die Scheibe

$$\mathbf{f}_x = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p}_x dA \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_y = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p}_y dA \quad (3.31)$$

mit den Vektoren \mathbf{p}_x und \mathbf{p}_y der Lastordinaten an den Knoten und dem Vektor der Ansatzfunktionen \mathbf{N} wie im vorigen Abschnitt.

3.2.3 Kombination zum Schalelement

Wie schon in Abschnitt 2.2 aufgeführt sind die Biegeschwingungen einer Platte und die in-plane-Schwingungen einer Scheibe voneinander entkoppelt. Zusammengesetzt ergeben sie eine sogenannte Schale, die beide Bewegungen berücksichtigt. Diese Kopplung ist insofern wichtig, als dass an Stoßstellen zweier Schalen Anteile der Biegewelle sich im angrenzenden Bauteil als in-plane-Welle fortsetzen und umgekehrt. Im Extremfall, dass zwei Schalen senkrecht zu einander stehen, wird die gesamte Biegewelle zur in-plane-Welle und die in-plane-Welle zur Biegewelle.

Das ebene Schalelement besitzt die fünf Freiheitsgrade u_x , u_y , u_z , φ_x und φ_y mit folgendem Gleichungssystem:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{44} & \mathbf{K}^{45} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{54} & \mathbf{K}^{55} \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{44} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{55} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_z \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Zur Aufstellung des Gesamtgleichungssystems und zur Berücksichtigung einer beliebigen Lage des Schalelements im Raum ist eine Transformation durchzuführen. Diese erfolgt mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T} , die den Richtungskosinus zwischen den Achsen des lokalen und globalen Koordinatensystems abbildet. Die Transformation beispielsweise der lokalen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_ℓ in die globale \mathbf{K}_g ergibt sich durch

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_\ell \mathbf{T}. \quad (3.33)$$

Die Transformation erfordert das Vorhandensein des Drehwinkels φ_z , der in der Formulierung für das ebene Plattenelement nicht auftritt. Eine einfache Möglichkeit zur Handhabung bietet die Einführung einer künstlichen Steifigkeit K_{φ_z} . Bathe [11] schlägt $1 \cdot 10^{-4}$ multipliziert

mit dem kleinsten Diagonalelement der Steifigkeitsmatrix K_ℓ vor, einen weiteren Ansatz bieten Zienkiewicz und Taylor [134]. Eine komplexere Möglichkeit ist die Beschreibung der in-plane-Schwingungen unter Verwendung eines Ansatzes, der den Drehwinkel φ_z berücksichtigt [75].

Kennzeichnet man alle zur Platte gehörenden Größen mit P , die zur Scheibe gehörenden mit M (engl. *membrane*), so ergibt sich das Gleichungssystem für das Schalenelement zu

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\varphi_z} \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\varphi_z} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_P \\ \mathbf{u}_M \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_P \\ \mathbf{f}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

wobei \mathbf{u} die jeweiligen Freiheitsgrade und \mathbf{f} die jeweiligen Lasten zusammenfasst.

3.2.4 FEM für poroelastisches Material

Die Herleitung der Finiten-Element-Formulierung für ein poroelastisches Material erfolgt analog zu den vorherigen Abschnitten mittels der Methode der gewichteten Residuen. Ausgangspunkt sind die nach der Biotschen Theorie für das poroelastische Material aufgestellten Formulierungen von Atalla *et al.* [9], die als Freiwerte die Verschiebungen der Festkörperphase u_i^s und den Porendruck der Fluidphase p^f enthalten (Gl. 2.70 und 2.74). Die Gleichungen in ihrer schwachen Form mit der Wichtungsfunktion \tilde{g} und unter Berücksichtigung der 1. Greenschen Identität ergeben sich zu

$$\int_V \tilde{g}_{,j} \hat{\sigma}_{ij}^s dV - \int_A \tilde{g} [\hat{\sigma}_{ij}^s n_j] dA - \bar{\rho} \omega^2 \int_V \tilde{g} u_i^s dV - \tilde{\gamma} \int_V \tilde{g} p_{,j} dV = 0 \quad (3.35)$$

und

$$\frac{\phi^2}{\bar{\rho}_{22}} \int_V \tilde{g}_{,j} p_{,j} dV - \omega^2 \frac{\phi^2}{\bar{R}} \int_V \tilde{g} p dV - \omega^2 \tilde{\gamma} \int_V \tilde{g}_{,j} u_i^s dV + \omega^2 \tilde{\gamma} \int_A \tilde{g} n_i u_i^s dA - \frac{\phi^2}{\bar{\rho}_{22}} \int_A \tilde{g} p_{,j} n_j dA = 0. \quad (3.36)$$

Die Verschiebungen der Festkörperphase u_i^s sowie der Druck in der Fluidphase p werden approximiert durch die Verwendung von Ansatzfunktionen N_j^s beziehungsweise N_j^f und den Verschiebungen $(u_i^s)_j$ und Druckwerten p_j an den n Knoten eines Elements. Hochgestellte Indizes bezeichnen wieder die Zugehörigkeit zur Festkörper- (s) beziehungsweise Fluidphase (f) des poroelastischen Materials.

$$u_i^s = \sum_{j=1}^n N_j^s (u_i^s)_j \quad p = \sum_{j=1}^n N_j^f p_j \quad (3.37)$$

Für die Wichtungsfunktion \tilde{g} werden die gleichen Ansatzfunktionen N_j^s beziehungsweise N_j^f verwendet (Methode nach Galerkin).

Verschiebt man die Flächenintegrale als Lasten auf die rechte Seite, ergibt sich folgendes Gleichungssystem für das poroelastische Material

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ss} - \omega^2 \mathbf{M}^{ss} & -\mathbf{C}^{sf} \\ -\omega^2 \mathbf{C}^{fs} & \mathbf{K}^{ff} - \omega^2 \mathbf{M}^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{p}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_f \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Greifen keine äußeren Lasten an, so ergeben sich \mathbf{f}_s und \mathbf{f}_f zu Null. Die einzelnen elementweisen Beiträge ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 K_e^{ss} &= \int_V (\mathbf{N}^s)^T (\mathbf{D}^s)^T \mathbf{E}_p \mathbf{D}^s \mathbf{N}^s dV, \\
 M_e^{ss} &= \tilde{\rho} \int_V (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{N}^s dV, \\
 C_e^{sf} &= \tilde{\gamma} \int_V (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{D}^f \mathbf{N}^f dV, \\
 K_e^{ff} &= \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} \int_V (\mathbf{N}^f)^T (\mathbf{D}^f)^T \mathbf{D}^f \mathbf{N}^f dV, \\
 M_e^{ff} &= \frac{\phi^2}{\tilde{R}} \int_V (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{N}^f dV, \\
 C_e^{fs} &= \tilde{\gamma} \int_V (\mathbf{N}^f)^T (\mathbf{D}^f)^T \mathbf{N}^s dV = (C_e^{sf})^T.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

\mathbf{E}_p bezeichnet die Elastizitätsmatrix des poroelastischen Materials in der (u, p) -Formulierung und wird herangezogen, um die Komponenten des Spannungstensors $\hat{\sigma}_{ij}^s$ zu berechnen (Gl. 2.69). Mit $\hat{\sigma}^s = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz}]^T$ und $\varepsilon^s = [\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}]^T$ ist

$$\hat{\sigma}^s = \mathbf{E}_p \varepsilon^s = \mathbf{E}_p \mathbf{D}^s \mathbf{u}^s. \tag{3.40}$$

\mathbf{D} ist die Matrix der jeweiligen Ableitungsvorschriften, \mathbf{N} enthält die Ansatzfunktionen.

$$\mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} & P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} - 2N & P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} - 2N & 0 & 0 & 0 \\ P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} - 2N & P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} & P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} - 2N & 0 & 0 & 0 \\ P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} - 2N & P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} - 2N & P - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{R}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

$$\mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

$$\mathbf{N}^s = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^f = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n] \tag{3.43}$$

Die Lastvektoren \mathbf{f}_s und \mathbf{f}_f auf der rechten Seite des Gleichungssystems (Gl. 3.38) können als äußere Belastungen angesehen werden [105]. Eine beliebige auf eine Oberfläche des

poroelastischen Materials aufgebraachte Flächenlast $\hat{\mathbf{d}}$ wirkt anteilig auf die Festkörper- und die Fluidphase. Unter Verwendung der Ansatzfunktionen \mathbf{N}^s beziehungsweise \mathbf{N}^f und der Lastordinaten \mathbf{d} an den Knoten eines Elements ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die Elementbeiträge

$$(\mathbf{f}_s)_e = \int_A (\mathbf{N}^s)^T (\mathbf{d} - \phi \mathbf{d}_n) dA, \quad (3.44)$$

$$(\mathbf{f}_f)_e = \int_A (\mathbf{N}^f)^T \phi \mathbf{d}_n dA, \quad (3.45)$$

wobei \mathbf{d}_n den vektoriellen Anteil der Lastordinate in Normalenrichtung bezeichnet.

Die Flächenintegrale der Gleichungen 3.35 und 3.36 repräsentieren nicht nur von außen wirkende Lasten, sondern werden ebenfalls verwendet, um die Interaktion des poroelastischen Materials mit umgebenden Materialien darzustellen. Die Beschreibung der verschiedenen Interaktionen wird in Kapitel 4 detailliert dargestellt.

3.3 Randelementemethode (BEM)

Im Rahmen dieser Arbeit wird von Schallabstrahlung in ein unendliches Gebiet ausgegangen, so dass sich die zubeachtende Aufgabenstellung als Außenraumproblem darstellt. Als ein Mittel bietet sich die Randelementmethode (engl. *boundary element method*, BEM) an, da sie nur die Diskretisierung des Rands des Gebiets erfordert (und somit eine dreidimensionale Fragestellung auf eine zweidimensionale Betrachtung reduziert) und implizit die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung erfüllt, was bedeutet, dass sich Wellen nur in Richtung unendlich ausbreiten.

Die Anwendung der BEM erfordert die Kenntnis der Fundamentallösung des zugrundeliegenden mathematischen Modells. Im Folgenden wird ausgehend von der Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung die Randintegralgleichung hergeleitet und in ihrer diskretisierten Form als Randelementgleichung dargestellt.

3.3.1 Randintegralgleichung für die Wellenausbreitung im akustischen Fluid

Das Schallfeld in einem akustischen Fluid wird durch die in Abschnitt 2.3 vorgestellte Helmholtz-Gleichung (Gl. 2.35) abgebildet. Mit Hilfe der Methode der gewichteten Residuen kann die Helmholtz-Gleichung in eine Randintegralgleichung überführt werden (siehe [84]). Als Wichtungsfunktion wird die zugehörige Fundamentallösung p^* gewählt, die die inhomogene Differentialgleichung

$$\Delta p^*(\mathbf{x}, \xi) + \kappa^2 p^*(\mathbf{x}, \xi) = -\delta(\mathbf{x} - \xi) \quad (3.46)$$

erfüllen muss, in der $\delta(\mathbf{x} - \xi)$ die Delta-Dirac-Funktion beschreibt. Physikalisch stellt die Fundamentallösung die Antwort einer Punktquelle der Intensität 1 an der Stelle ξ (Kugelstrahler

0. Ordnung) für jeden Punkt \mathbf{x} im Raum dar. Im Dreidimensionalen lautet die Fundamentallösung für auslaufende Wellen (siehe zum Beispiel [131])

$$p^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi r} e^{i\kappa r} \text{ mit } r = |\mathbf{x} - \xi|. \quad (3.47)$$

Die Wichtung der homogenen Helmholtz-Gleichung mit der Fundamentallösung und Integration über das Volumen liefert

$$\int_V p^*(\mathbf{x}, \xi) (\nabla^2 p(\mathbf{x}) + \kappa^2 p(\mathbf{x})) dV = 0. \quad (3.48)$$

Die Anwendung der 2. Greenschen Identität [84] auf den ersten Term des Integranden ergibt

$$\int_V p^*(\mathbf{x}, \xi) \nabla^2 p(\mathbf{x}) dV = \int_A \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} p^*(\mathbf{x}, \xi) - p(\mathbf{x}) \frac{\partial p^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} dA + \int_V p(\mathbf{x}) \nabla^2 p^*(\mathbf{x}, \xi) dV \quad (3.49)$$

und führt nach Einsetzen in die Ausgangsgleichung 3.48 und unter Berücksichtigung der Filtereigenschaft der Delta-Dirac-Funktion auf folgenden Ausdruck, der lediglich die Integration über eine Fläche beinhaltet:

$$\int_A \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} p^*(\mathbf{x}, \xi) - p(\mathbf{x}) \frac{\partial p^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} dA = p(\xi). \quad (3.50)$$

Differentiation von p in Normalenrichtung gibt den Schallfluss $q = \partial p / \partial n$, für die Differentiation der Fundamentallösung ergibt sich [23, 131]

$$\frac{\partial p^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} = q^*(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{4\pi r^2} e^{i\kappa r} (1 - i\kappa r) \frac{\partial r}{\partial n}, \quad (3.51)$$

so dass Gleichung 3.50 ausgedrückt wird als

$$\int_A q(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \xi) - p(\mathbf{x}) q^*(\mathbf{x}, \xi) dA = p(\xi) \quad (3.52)$$

Die Funktionen $p(\mathbf{x})$ und $q(\mathbf{x})$ stellen Belegungen auf dem betrachteten Rand (Integral über A) dar. Wird nun auch der Ort der Einheitspunktquelle ξ auf den Rand verschoben, so ergibt sich eine Randintegralgleichung, die nur von Größen auf dem Rand abhängt.

Liegt ξ auf dem Rand (für $\mathbf{x} = \xi$), liegt eine Singularität vor (Gl. 3.47). Um das Verhalten beim Übergang des Quellpunkts auf den Rand zu erfassen, wird zunächst davon ausgegangen, dass der Quellpunkt von einem kugelförmigen Volumen V_ϵ mit dem Radius ϵ umschlossen ist (Abbildung 3.3).

Aus dem Volumenintegral über $V + V_\epsilon$ ergeben sich nach Anwendung der 2. Greenschen Identität zwei Oberflächenintegrale [46, 84].

$$\int_A q(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \xi) - p(\mathbf{x}) q^*(\mathbf{x}, \xi) dA + \int_{A_\epsilon} q(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \xi) - p(\mathbf{x}) q^*(\mathbf{x}, \xi) dA_\epsilon = p(\xi) \quad (3.53)$$

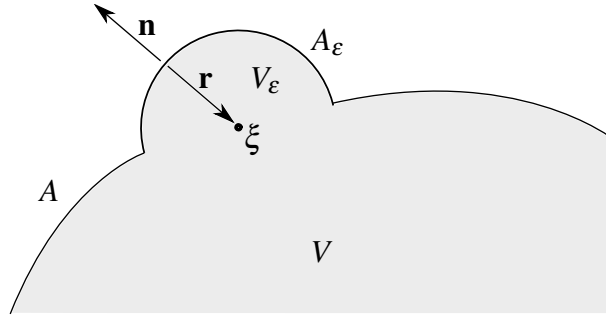


Abbildung 3.3: Betrachtung eines singulären Punktes

Der letzte Integralausdruck lässt sich erweitern zu

$$\int_{A_\varepsilon} p(\mathbf{x}) q^*(\mathbf{x}, \xi) dA_\varepsilon = \int_{A_\varepsilon} (p(\mathbf{x}) - p(\xi)) q^*(\mathbf{x}, \xi) dA_\varepsilon + p(\xi) \int_{A_\varepsilon} q^*(\mathbf{x}, \xi) dA_\varepsilon. \quad (3.54)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ergibt sich aufgrund der Kontinuität des Drucks p zu Null [131], das zweite Integral liefert für eine Halbkugel, die den Quellpunkt umschließt, $-\frac{1}{2}p(\xi)$, wenn der Übergang $\varepsilon \rightarrow 0$ ausgeführt und dA_ε in Kugelkoordinaten ausgedrückt wird:

$$\int_{A_\varepsilon} dA_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \varepsilon^2 \cos \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (3.55)$$

Der dritte Integralterm in Gleichung 3.53 weist nach dem Übergang in Kugelkoordinaten die Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ auf, so dass bei $\varepsilon \rightarrow 0$ das Integral zu Null wird.

Allgemein ergibt sich die Randintegralgleichung zu

$$c(\xi)p(\xi) + \int_A p(\mathbf{x}) q^*(\mathbf{x}, \xi) dA = \int_A q(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \xi) dA + \int_V a(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \xi) dV \quad (3.56)$$

mit möglichen Volumenquellen $a(\mathbf{x})$ und dem geometrieabhängigen Faktor $c(\xi)$, der sich jeweils durch

$$c(\xi) = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} q^*(\mathbf{x}, \xi) dA_\varepsilon \quad (3.57)$$

ermitteln lässt.

3.3.2 Randelementegleichung

Die Randintegralgleichung (Gl. 3.56) stellt die Beziehungen zwischen den Belegungen $p(\mathbf{x})$ und $q(\mathbf{x})$ auf den Rändern bei Anwesenheit einer Einheitspunktquelle an der Stelle ξ auf dem Rand her. Die Diskretisierung der Ränder führt auf e zweidimensionale sogenannte Randelemente. Diese werden durch Knoten, das heißt ihre Eckpunkte (und gegebenenfalls weitere Punkte) charakterisiert. Die Flächenintegrale lassen sich somit durch Summation über die einzelnen Elemente ersetzen. Die Druck- und Flussbelegungen $p(\mathbf{x})$ und $q(\mathbf{x})$ lassen sich durch

Ansatzfunktionen N_j und ihre Werte p_j beziehungsweise q_j an den n Knoten x_j eines Elements approximieren.

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j p_j \quad q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j q_j \quad (3.58)$$

Die angenäherte Randintegralgleichung ohne Volumenquellen und mit dem Quellpunkt ξ am Knotenpunkt x_i ist dann [131]

$$c(x_i)p(x_i) + \sum_{k=1}^e \int_{A_e} \sum_{j=1}^n N_j p_j q^*(x_j, x_i) dA = \sum_{k=1}^e \int_{A_e} \sum_{j=1}^n N_j q_j p^*(x_j, x_i) dA \quad (3.59)$$

Elementweise lassen sich die Integrale umformulieren zu

$$\int_{A_e} \sum_{j=1}^n N_j p_j q^*(x_j, x_i) dA = h_{ij} p_j \quad \text{mit} \quad h_{ij} = \int_{A_e} N_j q^*(x_j, x_i) dA, \quad (3.60)$$

$$\int_{A_e} \sum_{j=1}^n N_j q_j p^*(x_j, x_i) dA = g_{ij} q_j \quad \text{mit} \quad g_{ij} = \int_{A_e} N_j p^*(x_j, x_i) dA. \quad (3.61)$$

Die Summation über alle Elemente führt zu folgenden Gleichungssystem

$$c(x_i)p(x_i) + \hat{H}_{ij} p_j = G_{ij} q_j, \quad (3.62)$$

wobei in \hat{H}_{ij} beziehungsweise G_{ij} zu gleichen Knoten gehörende Beiträge von h_{ij} beziehungsweise g_{ij} addiert werden.

Die Einheitspunktquelle wird einzeln allen m Knoten des Gebiets zugewiesen (Kollokation), so dass ein System aus m Randintegralgleichungen entsteht [84].

$$\mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (3.63)$$

\mathbf{H} und \mathbf{G} sind quadratische Matrizen der Größe m , die Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{q} kennzeichnen die Druck- beziehungsweise Schallflusswerte an den m Knoten. Bekannte Druckwerte $\bar{\mathbf{p}}$ an einem Dirichletrand ermöglichen die Berechnung der unbekannten Flusswerte \mathbf{q} , aus bekannten Schallflusswerten $\bar{\mathbf{q}}$ an einem Neumannrand lassen sich die unbekannten Druckwerte \mathbf{p} bestimmen.

In einer Nachlaufrechnung lassen sich bei Kenntnis der Randgrößen $p(\mathbf{x})$ und $q(\mathbf{x})$ unter Verwendung von Gleichung 3.52 beziehungsweise der Gleichung inklusive Volumenquellen

$$p(\xi) + \int_A p(\mathbf{x}) q^*(\mathbf{x}, \xi) dA = \int_A q(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \xi) dA + \int_V a(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \xi) dV \quad (3.64)$$

für beliebige Punkte ξ im Volumen die Druckwerte $p(\xi)$ ermitteln.

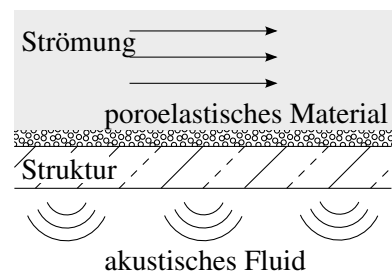
Behandlung von Halbräumen Die Randelementemethode erlaubt sowohl die Betrachtung von Innen- als auch von Außenraumproblemen. In beiden Fällen ist jeweils der vollständige Rand zu diskretisieren, durch den das Gebiet abgeschlossen wird.

Eine Besonderheit stellen die sogenannten Halbräume dar, bei denen sich der Untersuchungsraum auf halbusendliche Gebiete erstreckt. Beispiele umfassen die Wellenausbreitung in Böden (die Oberfläche der Böden stellt die Berandung des Gebiets dar) oder die Schallausbreitung in Luft über der Erdoberfläche. Findet die Lasteinleitung auf einer begrenzten Fläche statt, so kann die Diskretisierung des Randes in kurzer Entfernung zur Einleitungsfläche abgebrochen werden, ohne dass der Abbruchfehler die Lösung wesentlich beeinträchtigt [46,47,80]. Langer [85] wählt einen Ansatz, bei dem die Größe des diskretisierten Gebiets je Richtung der dreifachen Länge der Lasteinleitungsfläche entspricht.

Andere Möglichkeiten, die in dieser Arbeit nicht zur Anwendung kommen, sind der Einsatz von sogenannten infiniten Randelementen [69,70] oder die Verwendung einer Fundamentallösung für den Halbraum [94].

4 Interaktion

Die Komponenten des betrachteten Systems aus Strömung, Struktur und akustischem Fluid, gegebenenfalls erweitert um ein poroelastisches Material, interagieren miteinander und stellen keine unabhängigen Teilsysteme dar. Eine zutreffende Abbildung des Gesamtsystems ist daher nur möglich, wenn die Interaktionen der einzelnen Teilkomponenten berücksichtigt werden, das heißt, wenn die entsprechenden Kopplungsbedingungen erfüllt sind.



Im Folgenden wird zunächst kurz der Unterschied zwischen schwacher und strenger Kopplung erläutert. Anschließend werden die einzelnen Interaktionen dargestellt, die sich im Rahmen der hier relevanten Betrachtungen ergeben. Zunächst werden die etablierten Interaktionen vorgestellt, angefangen bei der Kopplung von einer Struktur mit einem Fluid (sowohl ein akustisches Fluid als auch eine Strömung) und übergehend zu den bekannten Kopplungsbedingungen eines poroelastischen Materials mit einer Struktur und einem akustischen Fluid.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit den zu diskutierenden Kopplungsbedingungen zwischen einem poroelastischen Material und einer Strömung. Ausgehend von den bestehenden Beschreibungen der Interfacebedingungen erfolgt hier die Herleitung einer neuen Formulierung für den Frequenzbereich. Abschließend wird die numerische Umsetzung dieser Formulierung für die Finite-Elemente-Methode dargestellt.

Schwache und strenge Kopplung Grundsätzlich können zwei Arten der Kopplung unterschieden werden: die schwache Kopplung, bei der die Wirkung einer Komponente auf eine andere berücksichtigt wird, aber keine Wechselwirkungen, und die strenge Kopplung, die die gegenseitigen Wechselwirkungen umfasst.

In der technischen Umsetzung bedeutet die Berücksichtigung der Interaktionen einen Austausch von Daten über die Grenzfläche (auch bezeichnet als *Interface*) der Komponenten. Bei einer schwachen Kopplung werden je Berechnungsschritt nur einmal Daten über die Kopplungsfläche ausgetauscht. Die Umsetzung ist verhältnismäßig einfach realisierbar, allerdings sind die Kopplungsbedingungen in der Regel nicht exakt erfüllt, so dass schwachgekoppelte Verfahren Einschränkungen hinsichtlich Stabilität und Genauigkeit unterliegen.

Eine strenge Kopplung erfüllt die Kopplungsbedingungen exakt. Die strenge Kopplung unterscheidet zwischen *monolithischen* und *iterativen* Verfahren. Im ersten Fall werden die zu lösenden Gleichungssysteme, die sich aus der Simulation der Teilkomponenten ergeben, unter

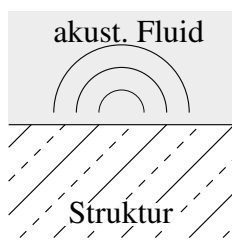
Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen zu einem Gesamtgleichungssystem zusammengefügt, das dann einmalig gelöst wird. Der Kern eines iterativen Verfahrens besteht aus dem Austausch von Daten über die Grenzfläche, gefolgt vom Lösen der einzelnen Gleichungssysteme der Komponenten. Diese Schritte werden solange wiederholt, bis die Kopplungsbedingungen erfüllt sind. Die streng gekoppelten Verfahren erfordern im Allgemeinen einen höheren Rechenaufwand, weisen dafür jedoch die Nachteile der schwachen Kopplung nicht auf.

4.1 Interaktion Struktur – Fluid

Bei der Betrachtung der Interaktion zwischen einer elastischen Struktur und einem Fluid – unabhängig davon, ob es sich um ein akustisches Fluid oder eine Strömung handelt – gilt die Annahme, dass die Tangentialkomponente der auf die Struktur wirkenden Kraft Null ist. Im Falle eines akustischen Fluids beruht diese Annahme darauf, dass ein reibungsfreies Fluid keine Schubkräfte aufnehmen kann und nur der akustische Druck von Bedeutung ist [4]. Zur Ermittlung der aus einer Strömung resultierenden Kräfte, die an der Schnittstelle wirken, ist der Spannungstensor (Gl. 2.9) zu betrachten, der sowohl einen Druckanteil als auch einen Anteil aus viskosen Spannungen enthält. Am Interface sind üblicherweise die viskosen Spannungen klein gegenüber den Druckwerten, so dass auf die Berücksichtigung dieser Anteile verzichtet werden kann [129].

Unter Berücksichtigung dieser Annahme werden in den nachfolgenden Abschnitten die für diese Arbeit herangezogenen Kopplungsbedingungen erläutert: für die Interaktion einer elastischen Struktur mit einem akustischen Fluid und für die Interaktion einer elastischen Struktur mit einer Strömung.

4.1.1 Interaktion Struktur – akustisches Fluid



Voraussetzung für die Schallabstrahlung einer Struktur in ein akustisches Fluid sind Auslenkungen der Struktur senkrecht zur Oberfläche, das heißt, die Struktur führt Bewegungen in Normalenrichtung aus. Die Kopplungsbedingungen werden unter der Annahme formuliert, dass die Vektoren der jeweiligen Normalenrichtung (\mathbf{n}_{str} für die Struktur beziehungsweise \mathbf{n}_{af} für das akustische Fluid) einander entgegengesetzt sind (siehe Abbildung 4.1).

Gemäß Antes [4] gelten neben der zuvor genannten Bedingung, dass keine tangentialen Kräfte an der Grenzfläche wirken, folgende Kopplungsbedingungen zwischen einer elastischen Struktur und einem Fluidgebiet:

- Die Normalkomponente der auf die Struktur wirkenden Kraft steht im Gleichgewicht zum akustischen Druck des Fluids.
- Die Normalkomponente der Beschleunigung von Fluidteilchen stimmt mit der der benachbarten Strukturteilchen überein.

Die erste Bedingung stellt die Kontinuität des Drucks über die Kopplungsfläche sicher.

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{str}) \mathbf{n}_{str} = -p \quad (4.1)$$

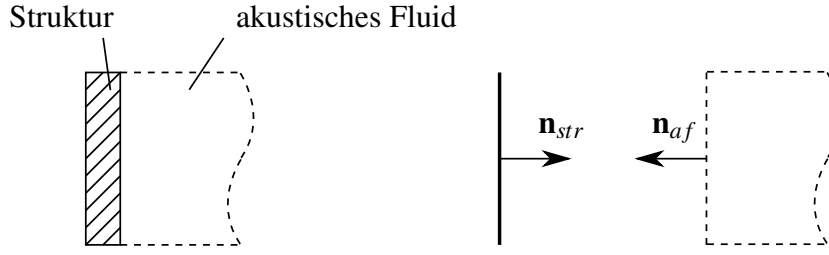


Abbildung 4.1: Kopplung von Struktur und akustischem Fluid

σ bezeichnet den Spannungstensor der Struktur. Die zweite Bedingung setzt den Schallfluss q in Beziehung zur Strukturauslenkung in Normalenrichtung $u_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$.

$$q = \frac{\partial p}{\partial n} = -\omega^2 \rho_{af} u_n = -\omega^2 \rho_{af} \mathbf{n} \mathbf{u} \quad (4.2)$$

ω steht für die Kreisfrequenz der Schwingung, ρ_{af} ist die Dichte des akustischen Fluids. Die vorgenannten Bedingungen berücksichtigen die gegenseitigen Wechselwirkungen, so dass Struktur und akustisches Fluid streng gekoppelt sind.

Die Kopplungsbedingungen sind in die Simulationsverfahren zu integrieren. Die erste Bedingung entspricht einer Belastung der Struktur durch den Fluiddruck. Dieses ist in der FE-Formulierung als Kopplungslastvektor \mathbf{f}_c zu berücksichtigen, der sich elementweise je Kopplungsfläche ergibt zu

$$\mathbf{f}_c = - \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \mathbf{p}_n, \quad (4.3)$$

mit dem Vektor \mathbf{p}_n des normal zum Interface wirkenden Drucks an jedem Knoten (siehe auch Gleichung 3.24) beziehungsweise unter Berücksichtigung von $p_n = p \cdot \mathbf{n}$ zu

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{C} \mathbf{p} = - \int_A (\mathbf{N}^{str})^T \mathbf{n} \mathbf{N}^{af} dA \mathbf{p}, \quad (4.4)$$

wobei \mathbf{N}^{str} die Matrix der Ansatzfunktionen für die Verschiebungen des Struktur-Elements darstellt, \mathbf{N}^{af} der Vektor der Ansatzfunktionen für den akustischen Druck ist, und \mathbf{p} die Druckkoordinaten an den Knoten enthält. Summiert über alle einzelnen Kopplungsflächen ergibt sich die FE-Gleichung der Struktur für alle Knoten des Interfaces zu

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{p}, \quad (4.5)$$

wobei die Matrix \mathbf{C} die Beiträge \mathbf{c} aus den einzelnen Kopplungsflächen enthält.

Für die Implementierung der zweiten Bedingung ist die Randelementeformulierung anzupassen. Im Bereich der Kopplungsfläche kann der Schallfluss q durch den vorgenannten Ausdruck (Gl. 4.2) ersetzt werden. Für die Knoten des Interfaces lautet die Gleichung dann

$$\mathbf{H} \mathbf{p} = -\omega^2 \rho_{af} \mathbf{G} \mathbf{u}. \quad (4.6)$$

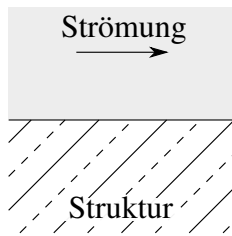
Die Einflussmatrizen \mathbf{H} und \mathbf{G} ergeben sich durch Anwendung der Kollokationsmethode auf die Randintegralgleichung (siehe Abschnitt 3.3.2).

Fasst man die Gleichungen zur Berücksichtigung beider Kopplungsbedingungen zusammen, so gilt folgendes Gleichungssystem für die Knoten der Kopplungsfläche

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & -\mathbf{C} \\ \omega^2 \rho_{af} \mathbf{G} \mathbf{n} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Die Herleitung der Kopplungsgrößen kann ebenfalls über das Prinzip der virtuellen Arbeiten erfolgen (zum Beispiel [85]).

4.1.2 Interaktion Strömung – Struktur



Bei der Betrachtung der Interaktion von Strömung und Struktur wird davon ausgegangen, dass die Auslenkungen der Struktur so klein sind, dass sie das Strömungsfeld nicht verändern. Diese Annahme wird in den Arbeiten von Maury *et al.* [97] und Durant *et al.* [49] bestätigt. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt dementsprechend die Interaktion von Strömung und strukturellem Bauteil mittels einer schwachen Kopplung, so dass lediglich die Wirkung der Strömung auf die Struktur betrachtet wird, aber eine mögliche Rückwirkung des Verhaltens der Struktur auf die Strömung unberücksichtigt bleibt. Die Interaktion wird somit auf eine Randlast auf die Struktur reduziert.

Die schwache und nur einseitige Kopplung von Strömung und elastischer Struktur ermöglicht die Verwendung eines kommerziellen Programms zur Strömungssimulation, welches wie für CFD-Programme üblich Simulationen im Zeitbereich durchführt. Die weitere Simulation der Wellenausbreitung erfolgt mit dem institutseigenen Programm jedoch im Frequenzbereich.

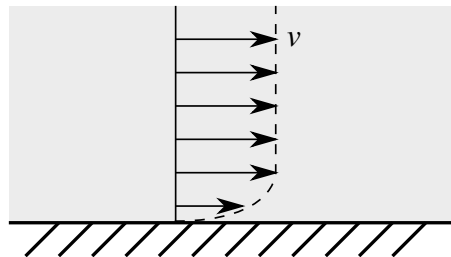


Abbildung 4.2: Qualitativer Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit v bei Plattenüberströmung

Die Geschwindigkeit einer Strömung v an einem Wandrand beträgt Null, so dass sich für eine überströmte Platte qualitativ der in Abbildung 4.2 dargestellte Geschwindigkeitsverlauf ausbildet. Wie einleitend erwähnt werden die am Interface auftretenden viskosen Spannungen vernachlässigt, so dass keine Tangentialkräfte anzusetzen sind. Es wirkt daher lediglich der Druck aus der Strömung in Normalenrichtung auf die Struktur. Es gilt für die Randlast aus Strömung \mathbf{f}_R

$$\mathbf{f}_R = -p \mathbf{n} \quad (4.8)$$

mit $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{str}$ vom Strukturgebiet nach außen weisend.

Übertragen auf die FE-Formulierung ergeben sich elementweise die Randlasten je Kopplungsfläche zu

$$(\mathbf{f}_R)_e = - \int_A (\mathbf{N}^{str})^T \mathbf{n} \mathbf{N} dA \mathbf{p} \quad (4.9)$$

wobei \mathbf{p} die Druckkoordinaten an den Knoten des Elements bezeichnet, \mathbf{N}^{str} wie im vorigen Abschnitt die Ansatzfunktionen der Verschiebungen der Struktur und \mathbf{N} die Ansatzfunktionen für den Druck aus der Strömung.

Die Druckwerte p auf der Grenzfläche sind ein Ergebnis der Strömungssimulation. Da die Ergebnisse zunächst im Zeitbereich vorliegen, werden sie mit Hilfe der Schnellen Fourier-Transformation (*fast Fourier transformation*, FFT) in den Frequenzbereich übertragen. Einzelheiten zur FFT und ihrer Umsetzung geben [25, 58].

4.2 Interaktionen mit poroelastischem Material

Die Interaktion eines poroelastischen Materials mit einer anderen Komponente unterscheidet sich von den bisher betrachteten Interaktionen dadurch, dass das poroelastische Material selbst aus zwei Phasen besteht (nämlich der Festkörper- und der Fluidphase) und die Kopplungsbedingungen nun unter Berücksichtigung dieser beiden Phasen aufzustellen sind.

Im Folgenden werden zunächst die Kopplungsbedingungen für die Interaktion eines poroelastischen Materials mit einem anderen erläutert, um anschließend durch Deduktion Interaktionsbedingungen für die Kopplung mit einer elastischen Struktur und mit einem akustischen Fluid durchzuführen.

Die schwachen Formulierungen für die Bewegungsgleichungen des poroelastischen Materials (Gl. 3.35 und 3.36) enthalten zwei Randintegrale, die als Lasteinträge über den Rand des Elements verstanden werden können. Betrachtet man die Kopplungsfläche zweier benachbarter Elemente (das Interface), so bestimmt die Summe der Randintegrale aus beiden Elementen die zwischen ihnen stattfindenden Interaktionen [9, 41].

Das Randintegral in der schwachen Form der Bewegungsgleichung der Festkörperphase (Gl. 3.35) lässt sich unter Berücksichtigung von Gleichung 2.68 und der Formulierung des Gesamtspannungstensors σ_{ij}^t

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^t(u_i^s, u_i^f) &= \sigma_{ij}^s(u_i^s, u_i^f) + \sigma_{ij}^f(u_i^s, u_i^f) = \sigma_{ij}^s(u_i^s, u_i^f) - \phi p^f \delta_{ij} \\ &= \hat{\sigma}_{ij}^s(u_i^s) - \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\bar{R}}\right) p^f \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.10)$$

umformen zu

$$- \int_A \tilde{g}[\hat{\sigma}_{ij}^s n_j] dA = - \int_A \tilde{g}[\sigma_{ij}^t n_j] dA - \int_A \tilde{g} \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\bar{R}}\right) p n_i dA. \quad (4.11)$$

Die Summe der Randintegralbeiträge beider Elemente wird mit dem Ausdruck I_1 bezeichnet und beinhaltet die Einwirkungen auf die Festkörperphase. Unter der Annahme des allgemeinen Falls der Kopplung zweier Elemente von unterschiedlicher Poroelastizität (gekennzeichnet

durch die Indizes 1 und 2) ergibt sich I_1 zu

$$I_1 = - \int_A \tilde{g}[(\sigma_{ij}^t)_1 n_j] dA - \int_A \tilde{g}\phi_1 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{R}_1}\right) p_1 n_i dA \\ + \int_A \tilde{g}[(\sigma_{ij}^t)_2 n_j] dA + \int_A \tilde{g}\phi_2 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{R}_2}\right) p_2 n_i dA. \quad (4.12)$$

Das Randintegral aus der schwachen Form der Gleichung für den Druck der Fluidphase (Gl. 3.36) ergibt sich durch Umformung von $p_{,j}$ (Gl. 2.67) und Erweiterung um den Term $\omega^2 \tilde{g}\phi(-u_i^s + u_i^s)n_i$ zu

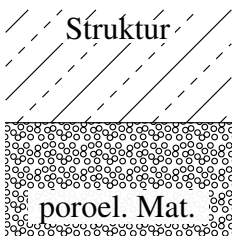
$$\omega^2 \tilde{\gamma} \int_A \tilde{g} n_i u_i^s dA - \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} \int_A \tilde{g} p_{,j} n_j dA = - \int_A \omega^2 \tilde{g}\phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) n_i u_i^s dA - \int_A \omega^2 \tilde{g}\phi (u_i^f - u_i^s) n_i dA. \quad (4.13)$$

Der Ausdruck I_2 umfasst die Einwirkungen auf die Fluidphase. Für zwei benachbarte Elemente mit unterschiedlichen Poroelastizitäten (Indizes 1 und 2) ergibt sich I_2 aus der Summe der Randintegrale zu

$$I_2 = - \int_A \omega^2 \tilde{g}\phi_1 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{R}_1}\right) n_i (u_i^s)_1 dA - \int_A \omega^2 \tilde{g}\phi_1 ((u_i^f)_1 - (u_i^s)_1) n_i dA \\ + \int_A \omega^2 \tilde{g}\phi_2 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{R}_2}\right) n_i (u_i^s)_2 dA + \int_A \omega^2 \tilde{g}\phi_2 ((u_i^f)_2 - (u_i^s)_2) n_i dA. \quad (4.14)$$

Aufbauend auf den Formulierungen für I_1 und I_2 werden die Kopplungsbedingungen für die im Rahmen dieser Arbeit interessierenden Interaktionen hergeleitet.

4.2.1 Interaktion poroelastisches Material – Struktur



In diesem Abschnitt werden die Kopplungsbedingungen zwischen einem poroelastischen Medium und einer elastischen Struktur dargestellt. Folgende Bedingungen gelten an der Kopplungsfläche (siehe [104]):

$$(\sigma_{ij}^t)^p \cdot n_j = (\sigma_{ij}^t)^{str} \cdot n_j, \\ u_i^s = u_i^{str}, \\ (u_i^f - u_i^s) n_i = 0. \quad (4.15)$$

Der hochgestellte Index p bezeichnet Größen des poroelastischen Materials, Index str Größen der elastischen Struktur. Indizes f und s stehen wie zuvor für Fluid- und Festkörperphase des poroelastischen Materials. Die erste Kopplungsbedingung sichert die Kontinuität der Spannungen über das Interface, die zweite besagt, dass die Festkörperphase und die elastische Struktur fest miteinander verbunden sind. Die dritte Bedingung setzt die Normalgeschwindigkeit der Festkörper- und der Fluidphase gleich, so dass kein Massenfluss über die Grenzfläche erfolgen kann.

Wird nun anstelle des poroelastischen Materials mit dem Index 2 ein elastisches Material angesetzt ($\phi_2 = 0$), so reduzieren sich die Integralausdrücke I_1 und I_2 (Gl. 4.12 und 4.14) auf

$$I_1 = - \int_A \tilde{g} [(\sigma_{ij}^t)^p n_j] dA - \int_A \tilde{g} \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p n_i dA + \int_A \tilde{g} [(\sigma_{ij}^t)^{str} n_j] dA \quad (4.16)$$

und

$$I_2 = - \int_A \omega^2 \tilde{g} \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) n_i u_i^s dA - \int_A \omega^2 \tilde{g} \phi \left(u_i^f - u_i^s \right) n_i dA \quad (4.17)$$

und weiter unter Beachtung der Kopplungsbedingungen (Gl. 4.15) auf

$$I_1 = - \int_A \tilde{g} \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p n_i dA, \quad (4.18)$$

$$I_2 = - \int_A \omega^2 \tilde{g} \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) n_i u_i^s dA. \quad (4.19)$$

Für die Umsetzung dieser Kopplungsbedingungen in die FE-Formulierung sind I_1 und I_2 als Lasten auf die Festkörper- beziehungsweise Fluidphase anzusehen, die in das Gleichungssystem einzubauen sind. Die Approximation der Verschiebungen u und des Drucks p über Ansatzfunktionen (Gl. 3.37) und die Wahl der Wichtungsfunktionen gemäß der Methode nach Galerkin führen auf folgende Beiträge je Interface:

$$I_1 = -\mathbf{c}^{pstr} \mathbf{p} = -\phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n} \mathbf{N}^f dA \mathbf{p} \text{ bzw.} \quad (4.20)$$

$$I_2 = -\omega^2 (\mathbf{c}^{pstr})^T \mathbf{u} = -\omega^2 \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}^s dA \mathbf{u}. \quad (4.21)$$

Ohne äußere am Interface angreifende Kräfte ergibt sich ein FE-Gleichungssystem für die Knoten der Kopplungsfläche, das die Matrixbeiträge für das poroelastische Material \mathbf{K}^{ss} , \mathbf{M}^{ss} , \mathbf{C}^{sf} , \mathbf{K}^{ff} und \mathbf{M}^{ff} (Gl. 3.38) und die zusammengefasste Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{str} sowie die Massennmatrix \mathbf{M}^{str} des Schalenelements umfasst.

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}^{ss} + \mathbf{K}^{str}) - \omega^2 (\mathbf{M}^{ss} + \mathbf{M}^{str}) & -\mathbf{C}^{sf} - \mathbf{C}^{pstr} \\ -\omega^2 ((\mathbf{C}^{sf})^T + (\mathbf{C}^{pstr})^T) & \mathbf{K}^{ff} - \omega^2 \mathbf{M}^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Für eine überwiegende Anzahl der im akustischen Bereich eingesetzten poroelastischen Materialien ist die Annahme zutreffend, das Verhältnis von Kompressionsmodul des poroelastischen Materials zu dem der Festkörperphase als klein anzusehen ($K_b/K_s \ll 1$) [3]. Dieses bringt die Vereinfachung

$$\phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \cong 1, \quad (4.23)$$

und die Kopplungsbeiträge

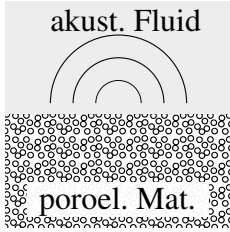
$$\mathbf{c}^{pstr} = \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n} \mathbf{N}^f dA \quad (4.24)$$

haben (bei der Wahl gleicher Ansatzfunktionen) den gleichen Aufbau wie die Kopplungsmatrizen zur Kopplung von elastischer Struktur und akustischem Fluid bei der Verwendung einer FE-Formulierung (vergleiche auch Gleichung 4.4). Ausführungen zur Simulation von akustischem Fluid mittels FEM und zu den entsprechenden Kopplungen finden sich in [1, 33, 85].

4.2.2 Interaktion poroelastisches Material – akustisches Fluid

Zur Darstellung der Interaktion zwischen einem poroelastischen Material und einem akustischen Fluid werden die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Randintegralausdrücke I_1 und I_2 (Gl. 4.12 und 4.14) wieder aufgegriffen.

Am Interface gelten die folgenden Kopplungsbedingungen gemäß [41, 104]:



$$\begin{aligned} (\sigma_{ij}^t)^p \cdot n_j &= -p^{af} \cdot n_i, \\ p^f &= p^{af}, \\ \frac{1}{\rho_{af} \omega^2} \frac{\partial p^{af}}{\partial n} &= \left((1 - \phi) u_i^s + \phi u_i^f \right) n_i. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die erste Bedingung sichert die Kontinuität der Normalspannungen über die Kopplungsfläche. Die zweite Bedingung besagt, dass sich der Fluiddruck am Interface nicht ändert. Die Kontinuität der Verschiebungen an der Grenzfläche wird durch die dritte Bedingung dargestellt.

Bei Ankopplung eines akustischen Fluids ($\phi_2 = 1$) an ein poroelastisches Material ergeben sich die Ausdrücke I_1 und I_2 zu

$$I_1 = - \int_A \tilde{g} [(\sigma_{ij}^t)^p n_j] dA - \int_A \tilde{g} \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p n_i dA + \int_A \tilde{g} [-p^{af} n_i] dA + \int_A \tilde{g} p^{af} n_i dA \quad (4.26)$$

und (unter Berücksichtigung von Gl. 4.2)

$$\begin{aligned} I_2 = - \int_A \omega^2 \tilde{g} \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) n_i u_i^s dA - \int_A \omega^2 \tilde{g} \phi \left((u_i^f) - (u_i^s) \right) n_i dA \\ + \int_A \omega^2 \tilde{g} \frac{1}{\rho_{af} \omega^2} \frac{\partial p^{af}}{\partial n} dA. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Durch Einsetzen der Kopplungsbedingung reduzieren sich I_1 und I_2 auf

$$I_1 = \int_A \tilde{g} \left(1 - \phi - \phi \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p^{af} n_i dA \quad (4.28)$$

und

$$I_2 = \int_A \omega^2 \tilde{g} \left(1 - \phi - \phi \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) n_i u_i^s dA. \quad (4.29)$$

Zur Überführung dieser Bedingungen in die FE-Formulierung werden erneut Ansatz- und Wichtungsfunktionen wie im vorigen Abschnitt verwendet, so dass sich je Interface die Beiträge

zusammensetzen aus

$$I_1 = -\mathbf{c}^{paf} \mathbf{p} = \left(1 - \phi - \phi \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n} \mathbf{N}^f dA \mathbf{p} \text{ bzw.} \quad (4.30)$$

$$I_2 = -\omega^2 (\mathbf{c}^{paf})^T \mathbf{u} = \omega^2 \left(1 - \phi - \phi \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}^s dA \mathbf{u}. \quad (4.31)$$

Das resultierende FE-Gleichungssystem für die Knoten des Interfaces von poroelastischem Material und akustischem Fluid lautet mit den Steifigkeits- und Massenmatrizen des poroelastischen Materials \mathbf{K}^{ss} , \mathbf{M}^{ss} , \mathbf{C}^{sf} , \mathbf{K}^{ff} und \mathbf{M}^{ff} (Gl. 3.38) und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{af} und der Massenmatrix \mathbf{M}^{af} aus der FE-Formulierung des akustischen Fluids (siehe [1, 33, 85])

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ss} - \omega^2 \mathbf{M}^{ss} & -\mathbf{C}^{sf} - \mathbf{C}^{paf} \\ -\omega^2 ((\mathbf{C}^{sf})^T + (\mathbf{C}^{paf})^T) & (\mathbf{K}^{ff} + \mathbf{K}^{af}) - \omega^2 (\mathbf{M}^{ff} + \mathbf{M}^{af}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Bei Annahme eines üblichen poroelastischen Materials (siehe voriger Abschnitt) ergibt

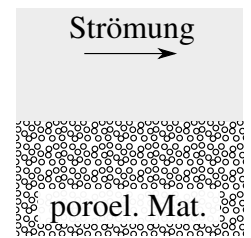
$$1 - \phi - \phi \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} = 0, \quad (4.33)$$

so dass die Kopplungsgrößen \mathbf{C}^{paf} ebenfalls zu Null fallen. In diesem Fall ist für die Kopplung lediglich die kinematische Bedingung $p^f = p^{af}$ zu erfüllen.

4.3 Interaktion poroelastisches Material – Strömung

In diesem Abschnitt wird die Interaktion eines poroelastischen Mediums mit einer Strömung beleuchtet. Im Gegensatz zu den vorgenannten Kopplungen (mit einer elastischen Struktur oder einem akustischen Fluid) besteht die Besonderheit, dass entlang der Grenzfläche eine tangentielle Bewegung stattfinden kann. Die Abbildung 4.3 zeigt beispielhaft den Geschwindigkeitsverlauf in der Strömung und dem poroelastischen Material.

Der Aspekt einer tangentialen Komponente ist zuvor nicht zu berücksichtigen gewesen, da bei der Kopplung eines poroelastischen Materials mit einer elastischen Struktur die Einbeziehung von tangentialen Verschiebungen implizit gegeben ist, indem die Verschiebungen der Festkörperphase und der elastischen Struktur gleichgesetzt sind (Gl. 4.15). Im Fall der Interaktion mit einem akustischen Fluid sind nur die Auslenkungen normal zum Interface akustisch wirksam (Gl. 4.25), so dass tangentielle Anteile keine Rolle spielen. Eine Deduktion der Interaktionsbedingungen wie zuvor über die Randintegralbeiträge I_1 und I_2 (Gl. 4.12 und 4.14) ist somit nicht möglich, so dass im Folgenden kurz die vorhandenen Arbeiten zum Thema Kopplung von Strömung und porösem Material vorgestellt werden und anschließend für die hier zu realisierende Kopplung von Strömung und poroelastischem Material Bedingungen hergeleitet und deren numerische



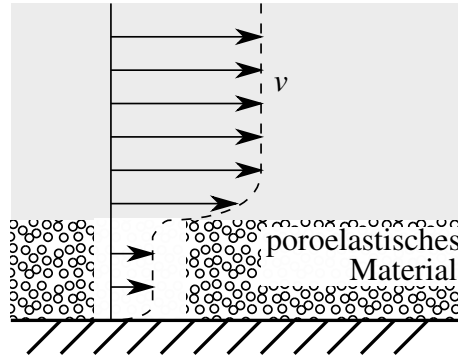


Abbildung 4.3: Qualitativer Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit v bei Überströmung einer mit einer poroelastischen Schicht belegten Platte

Umsetzung vorgestellt werden.

Strömung – Struktur Die Kopplung einer Navier-Stokes-Strömung mit einer elastischen Struktur stellt einen klassischen Fall der Fluid-Struktur-Interaktion dar. Entsprechende Ausführungen zu Kopplungsmechanismen und Umsetzungen sind einer Vielzahl von Arbeiten zu entnehmen (zum Beispiel [63, 81, 99, 123, 129]). Eine Erweiterung um aeroakustischen Schall stellen die Untersuchungen von Schäfer *et al.* [115, 116] und Link *et al.* [95] dar. Die Schwierigkeiten liegen bei dieser Interaktion nicht in den Kopplungsbedingungen an sich, sondern in der Tatsache, dass bei großen Verformungen eine Beeinflussung der Strömung stattfindet. Die Simulation eines solchen Verhaltens muss daher im Zeitbereich erfolgen, wobei in jedem Zeitschritt die Kopplungsbedingungen zu erfüllen sind und ein nichtlineares System von Gleichungen gelöst werden muss.

Strömung – poröses Material Eine inkompressible Strömung wird charakterisiert durch eine gerichtete Geschwindigkeit und einen skalaren Druck. Diese sind am Interface ins Gleichgewicht mit den Reaktionskräften des porösen Materials zu setzen. Die üblicherweise für lineare Probleme akzeptierten Bedingungen der Kontinuität des Fluiddrucks und des Fluidmassentransports

$$p^c = p^f \quad \text{und} \quad v_n^c = (v_D)_n \quad (4.34)$$

werden auch als klassische Kopplungsbedingungen bezeichnet und finden sich ebenfalls in den Kopplungsbedingungen von poroelastischem Material und akustischem Fluid (Gl. 4.25) wieder. Der Index f steht wieder für Komponenten der Fluidphase eines porösen Materials, Index c für Komponenten der Strömung. v_D ist die Filtergeschwindigkeit nach Darcy, n bezeichnet die Normalenrichtung.

Arbeiten zur Interaktion von Strömung (auch als freies Fluid bezeichnet) mit einem porösen Material beziehen sich zunächst auf Materialien mit nichtdeformierbarer Festkörperphase. Beavers und Joseph [14] stellen in ihren Untersuchungen eine Gleitgeschwindigkeit (engl. *slip velocity*) auf der Außenseite des porösen Materials fest, die nicht der Filtergeschwindigkeit nach Darcy im porösen Medium entspricht, so dass eine Art Grenzschicht im Bereich der Kontaktflä-

che anzunehmen ist. Beavers und Joseph definieren die Gleitgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsgradienten, was durch Saffman [110] theoretisch bestätigt wird. Die sogenannte Beavers-Joseph-Saffman-Bedingung lautet

$$\frac{\partial v_t^c}{\partial n} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}}(v_t^c - v_D) \quad (4.35)$$

mit der Strömungsgeschwindigkeit v_t^c tangential zum Interface, der Permeabilität K des porösen Mediums und einer Konstanten α zur Beschreibung der materialabhängigen Oberflächenbeschaffenheit (engl. *slip rate coefficient*). Die Bedingung sagt aus, dass die Größe des Geschwindigkeitssprungs am Interface direkt proportional zur Scherspannung sei, und stellt einen mathematischen Ansatz dar, um das im porösen Material auftretende Grenzschichtphänomen abzubilden [102]. Die Beavers-Joseph-Saffman-Bedingung hat bei der Betrachtung von überströmten porösen Materialien allgemeine Akzeptanz erlangt, zum Beispiel in [44, 86, 90]. Ausführliche mathematische Betrachtungen dazu geben Jäger *et al.* [76–78]. Eine *a priori*-Bestimmung des Parameters α beispielsweise auf der Basis der Materialeigenschaften oder der Strömungsgeschwindigkeit ist bis heute allerdings nicht bekannt, so dass trotz Eingrenzung auf den bekannten Wertebereich keine verlässlichen Aussagen über das Verhalten am Interface zu treffen sind.

Die Unterscheidung nach den Strömungsverhältnissen im porösen Material und im freien Fluid (parallele Strömung zur Oberfläche des porösen Materials beziehungsweise eine Durchströmung senkrecht dazu) führt auf nicht einheitlich anzuwendende und kontroverse Kopplungsbedingungen (siehe [93, 112]).

Ein Vergleich der verschiedenen Formulierungen bezüglich der Kopplungsbedingungen findet sich in [2].

4.3.1 Kopplungsbedingungen Strömung – poroelastisches Material

Die vorgenannten Kopplungsformulierungen beziehen sich auf poröse Materialien, deren Festkörperphase als nicht deformierbar angenommen wird. Im Folgenden werden die Interfacebedingungen für poroelastische Materialien, das heißt solche Materialien, deren Festkörperphase verformbar ist, betrachtet.

Um die Kopplungsbedingungen für ein poroelastisches Material zu formulieren, nehmen Cieszko und Kubik [30] an, dass die zulässigen Kopplungsbedingungen die Kontinuität des Massenflusses, des Impulses und der mechanischen Energie über die Grenzfläche sind.

Impulserhaltung Nach Linearisierung ergibt sich aus der Impulserhaltung, dass am Interface die normalen und tangentialen Spannungsanteile übereinstimmen müssen.

$$(\sigma_{ij}^t)^p \cdot n_j = (\sigma_{ij}^t)^c \cdot n_j \quad (4.36)$$

σ_{ij}^t ist der Gesamtspannungstensor des poroelastischen Materials (hochgestellter Index p) beziehungsweise der Strömung (hochgestellter Index c).

Showalter [120] zieht nur für die normal zur Interfacefläche wirkenden Spannungen die Gesamtspannungen heran. Für die tangential wirkenden Spannungen werden die effektiven Spannungen (das heißt rein die auf den Verschiebungen u^s beziehungsweise auf den Geschwindigkeiten v^c basierenden Spannungen, siehe Gleichungen 2.9 und 4.10) berücksichtigt. Für die Kontinuität der Normalspannung ergibt sich nach Showalter

$$((\sigma_{ij}^t)^p \cdot n_j) \cdot n_i = ((\sigma_{ij}^t)^c \cdot n_j) \cdot n_i, \quad (4.37)$$

und mit dem Wert der effektiven Normalspannung $\sigma_n^{eff} = (\sigma_{ij}^{eff} n_j) n_i$ und der tangentialen Spannung ausgedrückt als $(\sigma_t^{eff})_i = \sigma_{ij}^{eff} n_j - \sigma_n^{eff} n_i$ resultiert der Ausdruck für das Gleichgewicht der Tangentialspannungen zu

$$(\sigma_t^{eff})_i^p = (\sigma_t^{eff})_i^c. \quad (4.38)$$

Unter der Berücksichtigung, dass die von Showalter vernachlässigten Druckanteile sowohl in der Strömung als auch im poroelastischen Material sich in tangentialer Richtung stets aufheben, stimmt Showalters Formulierung mit der von Cieszko und Kubik überein. Dieser Bedingung folgen Badia *et al.* [10], die zusätzlich fordern, dass die aus der Strömung auf das Interface wirkende Normalspannung gleich dem Fluiddruck im poroelastischen Material ist:

$$((\sigma_{ij}^t)^c \cdot n_j) \cdot n_i = -p^f \quad (4.39)$$

Massenerhaltung Für die Kontinuität des Massenflusses (gleichbedeutend mit der Kontinuität der Geschwindigkeit bei gleicher Dichte) ergeben sich Formulierungen, die sich aufgrund der unterschiedlichen Theorien zur Beschreibung des poroelastischen Materialverhaltens nicht vergleichen lassen. So verwenden Cieszko und Kubik eine Theorie [51], der nicht die von Biot vorgenommene Aufteilung in Geschwindigkeiten der Festkörper- und der Fluidphase zugrunde liegt. Ihre Formulierung der Massenerhaltung stimmt in ihrer Struktur jedoch mit der von Badia *et al.* überein.

Während Showalters Bedingung die Filtergeschwindigkeit nach Darcy v_D enthält, deren Größe am Interface in Abhängigkeit der Fluiddrücke p^c und p^f , der Normalspannung $(\sigma_n)_i$ und einer zusätzlichen Konstanten formuliert ist, beschreiben Badia *et al.* eine Filtrationsgeschwindigkeit q durch die Bewegungsgeschwindigkeit der zwei Phasen des poroelastischen Mediums mit

$$q_i = \phi(v_i^f - v_i^s) \quad (4.40)$$

und ihre Kopplungsbedingung für die Kontinuität des Massenflusses über das Interface lautet umgeschrieben auf die Geschwindigkeiten

$$v_i^c \cdot n_i = (v_i^s + \phi(v_i^f - v_i^s)) \cdot n_i. \quad (4.41)$$

Energieerhaltung Cieszko und Kubik leiten aus einer Betrachtung der Energiebilanz eine Funktion ab, die die Dissipation von Energie an der Grenzfläche aufgrund der Viskosität des Fluids beschreibt. Im Rahmen der weiteren Ausführungen ergibt sich ein Ausdruck für eine

Druckdifferenz über das Interface in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten v_n^c und der gemäß der von Cieszko und Kubik verwendeten Theorie modifizierten Geschwindigkeit der Festkörperphase. Linearisierung bei kleinen Geschwindigkeiten würde wieder auf die klassische Bedingung des konstanten Drucks (Gl. 4.34) führen. Weiterhin ergeben sich Formulierungen für die Tangentialspannung des freien Fluids als auch der Fluidphase des porösen Materials, die in ihrem Aufbau der Beavers-Joseph-Saffman-Bedingung ähneln.

Showalter als auch Badia *et al.* beziehen die Beavers-Joseph-Saffman-Bedingung direkt zur Bestimmung der Tangentialspannungen im freien Fluid ein. Showalter verwendet dabei die effektiven tangentialen Gesamtspannungen $(\sigma_t^{eff})^c$, während die Formulierung nach Badia *et al.* die tangentialen Gesamtspannungen umfasst und sich zu

$$(\sigma_t^c)_i = \frac{\gamma}{\sqrt{K}} ((v_t^c)_i - (v_t^s)_i) \quad (4.42)$$

ergibt, wobei σ_t^c die tangentialen Gesamtspannungen darstellt und die Konstante γ dem Maß einer dynamischen Viskosität entspricht. Wird erneut berücksichtigt, dass sich die Druckanteile in tangentialer Richtung aufheben, sind die Formulierung von Showalter und Badia *et al.* identisch.

Den Arbeiten von Cieszko und Kubik [30], Showalter [120] und Badia *et al.* [10] ist gemein, dass sie sich zur Herleitung auf dieselben Grundsätze beziehen beziehungsweise zu gleichartigen Aussagen kommen. Die drei verglichenen Ausführungen stimmen darin überein, dass die klassische Bedingung des konstanten Drucks an der Kopplungsfläche nicht mehr gültig ist. Bedingt durch die Materialeigenschaften erfolgt eine Aufweitung des Kriteriums der Geschwindigkeitskontinuität.

Cieszko und Kubik verwenden in ihren weiteren Ausführungen eine stationäre, linearisierte Form der Navier-Stokes-Gleichung, um in Verbindung mit der Brinkman-Gleichung zur Beschreibung der Strömung in einem porösen Material analytisch die Geschwindigkeiten im freien Fluid als auch im porösen Material herzuleiten, und kommen zu guter Übereinstimmung zu den Experimenten von Beavers und Joseph [14].

Showalter koppelt eine kompressible Stokes-Strömung mit einem nach Biot und dem Filtergesetz nach Darcy modellierten poroelastischen Material. Er stellt für dieses Biot-Stokes-System eine Variationsformulierung auf, die unter der Vorgabe von Anfangsbedingungen als lineares Gleichungssystem lösbar ist.

Die Verwendung des Stokesschen Modells für eine schleichende Strömung erleichtert aufgrund ihrer Linearität die mathematische Analyse von Aufgabenstellungen [53]. Kann die betrachtete Strömung jedoch nicht als schleichend angenommen werden, so sind die Navier-Stokes-Gleichungen in ihrer kompletten Form zu berücksichtigen.

Badia *et al.* setzen für die Strömung die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen an. Die Kopplung des freien Fluids mit dem poroelastischen Material unter Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen erfolgt im Zeitbereich auf Basis der FEM. Die Modellierung nach Biot erfolgt mittels einer gemischten Formulierung, die den Druck des Fluids, die Filtrationsgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit der Festkörperphase umfasst (zu weiteren Zeitbereichsformulierungen des Biotschen Modells siehe [133]). Eine übliche Herleitung der

FE-Formulierung nach Galerkin kann aufgrund fehlender Stabilität des Drucks scheitern, so dass Badia *et al.* eine Stabilisierung für die finiten Elemente vorschlagen. Die Zeitintegration erfolgt durch ein einfaches Euler-Rückwärtsverfahren, und eine Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichungen wird erzielt, indem für die konvektive Geschwindigkeit diejenige des vorigen Zeitschritts verwendet wird.

Aus der Betrachtung der formulierten Interfacebedingungen ergibt sich, dass die Kopplungsbedingungen nach Badia *et al.* die umfassendsten sind. Sie decken sich mit denen nach Showalter und fügen eine Erweiterung hinzu, so dass letztendlich vier Bedingungen aufgestellt werden können: Kopplung der Normalenkomponente, Kopplung der Tangentialkomponente, Kontinuität der Geschwindigkeit und Kontinuität der Gesamtspannungen. In Verbindung mit der (u, p) -Formulierung nach Biot stehen somit für vier Freiwerte (drei Verschiebungen der Festkörperphase u_i^s und Druck der Fluidphase p^f) vier Gleichungen zur Verfügung. Die Bedingungen nach Badia *et al.* lassen sich direkt in die Biot-Formulierung umsetzen. Als einziger zusätzlicher Parameter geht der vorgenannte Koeffizient α (Gl. 4.35) beziehungsweise in seiner variierten Form als Koeffizient γ (Gl. 4.42) ein.

4.3.2 Numerische Umsetzung

Im Weiteren werden die zuvor als zutreffend identifizierten Kopplungsbedingungen nach Badia *et al.* herangezogen, um das Zusammenwirken von Strömung und poroelastischem Material abzubilden.

Unter Berücksichtigung der bereits in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Annahme, dass die Wechselwirkungen mit der Strömung vernachlässigbar sind, kann hier eine schwache Kopplung für die Interaktion einer Strömung mit einem poroelastischen Material formuliert werden. Die schwache Kopplung erlaubt den Übergang in den Frequenzbereich und somit die Anwendung von zur Vibrationsanalyse üblichen Berechnungsverfahren.

Für die Berücksichtigung der schwachen Kopplung mit einer Strömung sind die vorgenannten Interaktionsbedingungen auf die in Abschnitt 2.4 und 3.2.4 vorgestellte FE-Formulierung für ein poroelastisches Material zu übertragen. Im Folgenden ist die Herleitung der jeweiligen Kopplungsterme aufgeführt bis zur Darstellung des Gleichungssystems für die schwache Kopplung.

Kopplung der Normalenkomponente Die schwache Form für die Kopplungsbedingung der Normalenkomponente der Spannungen nach Badia *et al.* (Gl. 4.39) lautet

$$\int_A \tilde{g}((\sigma_{ij}^t)^c \cdot n_j) \cdot n_i dA = - \int_A \tilde{g} p^f dA. \quad (4.43)$$

Die Gesamtspannungen $(\sigma_{ij}^t)^c$ der Strömung lassen sich aufteilen in die effektiven Spannungen τ_{ij}^c und den Anteil aus Druck $p^c \delta_{ij}$ (Gl. 2.9).

$$\int_A \tilde{g}((\tau_{ij}^c)^c \cdot n_j) \cdot n_i dA - \int_A \tilde{g} p^c dA = - \int_A \tilde{g} p^f dA. \quad (4.44)$$

Die effektiven Spannungen der Strömung τ_{ij} ergeben sich aus den Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ multipliziert mit der zweifachen dynamischen Viskosität 2μ . Ist der Spannungstensor in der vektoriellen Form $\tau = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \tau_{12} \ \tau_{23} \ \tau_{13}]^T$ notiert, lassen sie die Komponenten folgendermaßen aus den Geschwindigkeiten berechnen:

$$\tau^c = 2\mu \mathbf{D}^* \mathbf{v}^c \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^c = \begin{bmatrix} v_1^c \\ v_2^c \\ v_3^c \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit v^c und der Druck in der Strömung p^c können näherungsweise mit Hilfe von Ansatzfunktionen beschrieben werden, beispielsweise mit denen, die für das poroelastische Material verwendet werden.

$$v_i^c = \sum_{j=1}^n N_j^s (v_i^c)_j \quad p^c = \sum_{j=1}^n N_j^f p_j^c \quad (4.46)$$

Ebenso erfolgt die Approximation des Drucks der Fluidphase p^f . Werden für den Ansatz nach Galerkin als Wichtungsfunktionen die Ansatzfunktionen benutzt, ergibt sich elementweise je Interface folgende Gleichung zur Kopplung der Normalkomponente:

$$\int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}_n 2\mu \mathbf{D}^* \mathbf{N}^s dA \mathbf{v}^c - \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{N}^f dA \mathbf{p}^c = - \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{N}^f dA \mathbf{p}^f. \quad (4.47)$$

Die Matrix \mathbf{N}_n enthält die Komponenten des Normalenvektors und realisiert die Multiplikation des Spannungstensors mit dem Normalenvektor $\tau_{ij} n_j$ unter der Berücksichtigung, dass die Komponenten des Spannungstensors in der vektoriellen Form wie oben angegeben vorliegen.

$$\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Kopplung der Tangentialkomponente Die Kopplungsbedingung der Tangentialspannungen enthält in der Formulierung nach Badia *et al.* (Gl. 4.42) die Geschwindigkeit der Festkörperphase v^s des poroelastischen Materials. Die schwache Form ergibt sich zu

$$\int_A \tilde{g}((\sigma_{ij}^t)^c \cdot n_j) \cdot t_i dA = \frac{\gamma}{\sqrt{K}} \int_A \tilde{g}(v_i^c - v_i^s) t_i dA. \quad (4.49)$$

\mathbf{t} bezeichnet dabei einen Vektor tangential zum Interface, der sich aus den Einheitsvektoren \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 zusammensetzt, die die Ebene der Kopplungsfläche aufspannen und orthogonal zum

Normalenvektor \mathbf{n} stehen. $(\sigma_{ij}^f)^c$ lässt sich wiederum wie im vorigen Abschnitt darstellen. Die Geschwindigkeit der Festkörperphase kann unter Annahme des harmonischen Ansatzes durch

$$\mathbf{u}^s = \hat{\mathbf{u}}^s \cdot e^{i\omega t}, \quad \mathbf{v}^s = i\omega \hat{\mathbf{u}}^s \cdot e^{i\omega t} \quad (4.50)$$

dargestellt werden (im Weiteren unter Verzicht auf die Kennzeichnung der Amplitude mittels $\hat{}$). Die Gleichung 4.49 wird dann zu

$$\int_A \tilde{g}((\tau_{ij})^c \cdot n_j) \cdot t_i dA - \int_A \tilde{g}(p^c \delta_{ij} \cdot n_j) \cdot t_i dA = \frac{\gamma}{\sqrt{K}} \int_A \tilde{g}(v_i^c - i\omega u_i^s) t_i dA. \quad (4.51)$$

Sortierung nach Zugehörigkeit und die Verwendung der Ansatzfunktionen sowohl zur Beschreibung von Geschwindigkeit, Verschiebung und Druck als auch für die Wichtungsfunktion führt elementweise auf

$$\int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{t}^T \mathbf{N}_n 2\mu \mathbf{D}^* \mathbf{N}^s - \frac{\gamma}{\sqrt{k}} (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{t}^T \mathbf{N}^s dA \mathbf{v}^c = -\frac{\gamma}{\sqrt{k}} i\omega \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{t}^T \mathbf{N}^s dA \mathbf{u}^s. \quad (4.52)$$

Der Term mit dem Druck aus Strömung p^c fällt zu Null, da Druck nicht tangential zur Kopplungsfläche wirken kann (Vektor \mathbf{t} und Normalenvektor \mathbf{n} sind orthogonal zueinander).

Kontinuität der Geschwindigkeit Die Bedingung für die Kontinuität der Geschwindigkeit in Normalenrichtung über das Interface (Gl. 4.41) enthält sowohl die Geschwindigkeit der Fluidphase v^f als auch die der Festkörperphase v^s . In der schwachen Form ergibt sich

$$\int_A \tilde{g} v_i^c n_i dA = \int_A \tilde{g} (v_i^s + \phi(v_i^f - v_i^s)) n_i dA. \quad (4.53)$$

Beide Parameter lassen sich unter Annahme des zeitharmonischen Ansatzes (Gl. 4.50) durch die entsprechenden Verschiebungen u^f und u^s ausdrücken. Mit Hilfe von Gleichung 2.67 erfolgt die Umformung der Verschiebungen der Fluidphase in Abhängigkeit des Drucks des Fluids p^f ,

$$u_i^f = \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i}^f - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i^s,$$

so dass für die Kontinuität der Normalgeschwindigkeit je Kopplungsfläche gilt:

$$\begin{aligned} \int_A \tilde{g} v_i^c n_i dA &= \int_A \tilde{g} ((1 - \phi) v_i^s + \phi v_i^f) n_i dA = i\omega \int_A \tilde{g} ((1 - \phi) u_i^s + \phi u_i^f) n_i dA \\ &= i\omega \int_A \tilde{g} \left((1 - \phi - \phi \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}) u_i^s + \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i}^f \right) n_i dA. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Für die Umsetzung in die FE-Formulierung werden zur Approximation der Freiwerte und für die Wichtungsfunktionen die Ansatzfunktionen \mathbf{N}^s und \mathbf{N}^f herangezogen, so dass sich die Kopplungsbedingung der Kontinuität der Geschwindigkeit je Interface elementweise ergibt zu

$$\begin{aligned} \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}^s dA \mathbf{v}^c = \\ \left(1 - \phi - \phi \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) i\omega \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}^s dA \mathbf{u}^s + \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} i\omega \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{D}^f \mathbf{N}^f dA \mathbf{p}^f. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Der Gradient des Fluiddrucks $p_{,i}^f$ wird mit Hilfe des Vektors der Ableitungen \mathbf{D}^f dargestellt (Gl. 3.42).

Kontinuität der Spannungen an der Kopplungsfläche Am Interface müssen die Randspannungen der Strömung mit denen des poroelastischen Material übereinstimmen. Die Kopplungsbedingung gemäß Gleichung 4.36 lässt sich in die Anteile von effektiver Spannung, Fluiddruck, Spannung der Festkörperphase und Fluiddruck des poroelastischen Materials zerlegen. In der schwachen Formulierung ergibt sich

$$\int_A \tilde{g}(\sigma_{ij}^t)^c \cdot n_j dA = \int_A \tilde{g}(\sigma_{ij}^t)^p \cdot n_j dA. \quad (4.56)$$

beziehungsweise mit der Detaillierung des jeweiligen Gesamtspannungstensors

$$\int_A \tilde{g}((\tau_{ij})^c - p^c \delta_{ij}) n_j dA = \int_A \tilde{g} \left(\hat{\sigma}_{ij}^s - \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p^f \delta_{ij} \right) n_j dA. \quad (4.57)$$

Die Umsetzung der Kopplungsbedingung in eine FE-Darstellung erfolgt durch Diskretisierung. Mit der approximierten Darstellung der Größen jeweils mit Hilfe von Ansatzfunktionen und der Methode nach Galerkin für die Wichtungsfunktionen lässt sich ein Ausdruck für die Gleichheit der Randspannungen über ein Interface darstellen. Der Spannungstensor $\hat{\sigma}_{ij}^s$ wird dabei wie in Gleichung 3.40 behandelt.

$$\begin{aligned} & \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{N}_n 2\mu \mathbf{D}^* \mathbf{N}^s dA \mathbf{v}^c - \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n} \mathbf{N}^f dA \mathbf{p}^c = \\ & \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{N}_n \mathbf{E}_p \mathbf{D}^s \mathbf{N}^s dA \mathbf{u}^s - \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n} \mathbf{N}^f dA \mathbf{p}^f \end{aligned} \quad (4.58)$$

Gleichungssystem und Implementierung der Kopplungsbedingungen Die vorgestellten vier Kopplungsbedingungen in ihrer FE-Formulierung können zu einem Gleichungssystem zusammengefasst werden. Die Kopplungsbedingungen bezüglich der Normalen- und Tangentialkomponente der Spannungen sowie der Kontinuität der Geschwindigkeit definieren jeweils skalare Werte, so dass diese Kopplungsbedingungen zu einer Gleichung zusammengesetzt werden können. Die Interfacebedingung für die Kontinuität der Spannungen liefert vektorielle Größen. Komprimiert ergibt sich somit folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_G & -\mathbf{P}_G \\ \mathbf{V}_N + \mathbf{V}_T + \mathbf{V}_V & -\mathbf{P}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^c \\ \mathbf{p}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_G & -\mathbf{D}_G \\ -\mathbf{U}_T + \mathbf{U}_V & -\mathbf{D}_N + \mathbf{D}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{p}^f \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Die einzelnen Elementbeiträge lauten für die Strömungsvariablen

$$\mathbf{V}_N = \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}_n 2\mu \mathbf{D}^* \mathbf{N}^s dA, \quad (4.60a)$$

$$\mathbf{P}_N = \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{n} \mathbf{N}^f dA, \quad (4.60b)$$

$$\mathbf{V}_T = \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{t}^T \mathbf{N}_n 2\mu \mathbf{D}^* \mathbf{N}^s - \frac{\gamma}{\sqrt{K}} (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{t}^T \mathbf{N}^s dA, \quad (4.60c)$$

$$\mathbf{V}_V = \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}^s dA, \quad (4.60d)$$

$$\mathbf{V}_G = \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{N}_n 2\mu \mathbf{D}^* \mathbf{N}^s dA, \quad (4.60e)$$

$$\mathbf{P}_G = \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n} \mathbf{N}^f dA \quad (4.60f)$$

und für die Parameter des poroelastischen Materials

$$\mathbf{D}_N = \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{N}^f dA, \quad (4.61a)$$

$$\mathbf{U}_T = \frac{\gamma}{\sqrt{K}} i\omega \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{t}^T \mathbf{N}^s dA, \quad (4.61b)$$

$$\mathbf{U}_V = \left(1 - \phi - \phi \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}\right) i\omega \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}^s dA, \quad (4.61c)$$

$$\mathbf{D}_V = \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} i\omega \int_A (\mathbf{N}^f)^T \mathbf{n}^T \mathbf{D}^f \mathbf{N}^f dA, \quad (4.61d)$$

$$\mathbf{U}_G = \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{N}_n \mathbf{E}_p \mathbf{D}^s \mathbf{N}^s dA, \quad (4.61e)$$

$$\mathbf{D}_G = \phi \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right) \int_A (\mathbf{N}^s)^T \mathbf{n} \mathbf{N}^f dA. \quad (4.61f)$$

Die vorgenannten Beiträge geben die Interaktionen über die Grenzfläche wieder, sie beinhalten daher die Integration über eine Fläche. Bei denjenigen Beiträgen, in die die effektiven Spannungen der Strömung τ_{ij} (Gl. 4.45) oder die Spannungen der Festkörperphase des poroelastischen Materials $\hat{\sigma}_{ij}^s$ (Gl. 3.40) eingehen, ist darauf zu achten, dass die Spannungsermittlung im Dreidimensionalen erfolgen muss, da die Auswertung nur über eine Fläche die Spannungsanteile nicht korrekt abbilden kann. Die Auswertung der Spannungen erfolgt somit unter Berücksichtigung aller Knoten eines Volumenelements. Für den Beitrag von \mathbf{U}_G (Gl. 4.61e) wird auf alle Knoten des poroelastischen Volumenelements zurückgegriffen, so dass durch den Beitrag \mathbf{U}_G die ursprüngliche Elementformulierung modifiziert wird. Zur Ermittlung der Anteile \mathbf{V}_N , \mathbf{V}_T und \mathbf{V}_G (Gl. 4.60a, 4.60c, 4.60e) wird hilfsweise das zweidimensionale Element, das die Strömungsdaten enthält, in ein dreidimensionales Volumenelement überführt.

Im Rahmen dieser Arbeit stellen die aus der Strömungssimulation ermittelten Größen für die Geschwindigkeit \mathbf{v}^c und den Druck p^c Randlasten auf das poroelastische Material dar. Bei bekannten Randgrößen \mathbf{v}^c und p^c ergibt sich folgendes Gleichungssystem für die zum Interface gehörenden Knoten, das aus der Kombination des Gleichungssystems für das poroelastische Material (Gl. 3.38) und des Gleichungssystems für die Kopplungsbedingungen (Gl. 4.59) resultiert.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ss} - \omega^2 \mathbf{M}^{ss} - \mathbf{U}_G & -\mathbf{C}^{sf} + \mathbf{D}_G \\ -\omega^2 \mathbf{C}^{fs} + \mathbf{U}_T - \mathbf{U}_V & \mathbf{K}^{ff} - \omega^2 \mathbf{M}^{ff} + \mathbf{D}_N - \mathbf{D}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{p}^f \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -V_G \mathbf{v}^c + \mathbf{P}_G \mathbf{p}^c \\ -(\mathbf{V}_N + \mathbf{V}_T + \mathbf{V}_V) \mathbf{v}^c + \mathbf{P}_N \mathbf{p}^c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Diese Gleichung stellt die Umsetzung einer schwachen Kopplung von Strömung und poroelastischem Material im Rahmen einer Finite-Elemente-Formulierung im Frequenzbereich dar. Im

folgenden Kapitel wird die so realisierte Kopplung auf Plausibilität untersucht und in Kapitel 6 zur Simulation von anwendungsnahen Aufgabenstellungen eingesetzt.

5 Plausibilitätsstudien

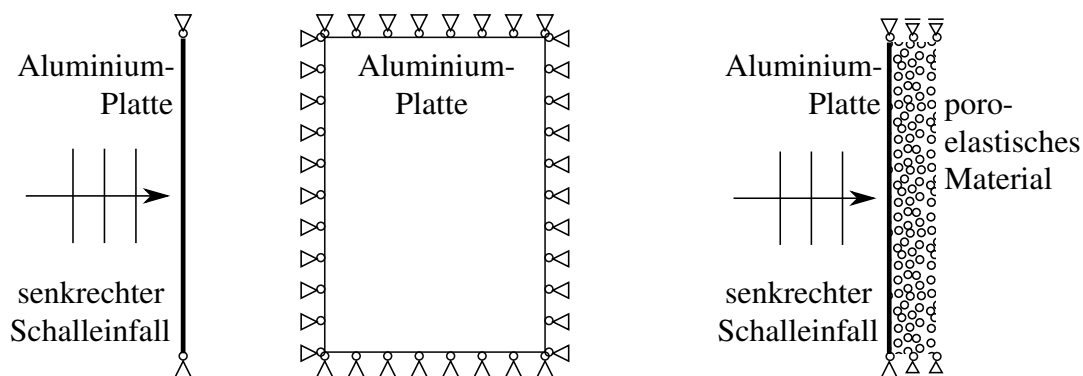
Für das zu betrachtende System aus Strömung, Struktur, akustischem Fluid und gegebenenfalls poroelastischem Material sind in den vorangehenden Kapiteln die Modelle, die Simulationsverfahren und die Interaktionen dargestellt. Die hier zur Anwendung kommenden Simulationsverfahren und fast alle Kopplungsmechanismen gelten als etabliert.

In Bezug auf die Implementation der in Abschnitt 4.3 beschriebenen neuen Kopplung von Strömung und poroelastischem Material werden in diesem Kapitel Beispiele zur Plausibilitätsprüfung dargelegt. Zunächst wird allgemein die Wirkung einer poroelastischen Schicht rekapituliert sowie Betrachtungen zur Diskretisierung gegeben.

5.1 Wirkung einer poroelastischen Schicht

Die Wirkungsweise eines poroelastischen Materials, das zur strukturellen Dämpfung auf ein Bauteil aufgebracht wird, zeigt sich anhand eines Beispiels nach Debergue [41]. Materialdaten und Abmessungen sind aus diesem übernommen.

Zunächst wird eine allseitig gelenkig gelagerte Aluminiumplatte durch senkrechten Schalleinfall einer ebenen Welle mit der Amplitude $P = 1 \text{ N/m}^2$ angeregt (siehe Abbildung 5.1(a)). Die erforderlichen Angaben finden sich in Tabelle 5.1(a). Danach wird die Platte mit ei-



(a) Gelenkig gelagerte Platte (Schnitt und Aufsicht) unter Anregung ebener Schallwellen

(b) Gelenkig gelagerte Platte (Schnitt) mit poroelastischer Schicht

Abbildung 5.1: Schematischer Versuchsaufbau

Dicke	$d = 0,001 \text{ m}$	Dicke	$d = 0,05 \text{ m}$
Länge	$a = 0,35 \text{ m}$	Strömungswiderstand	$\sigma = 13500 \text{ Ns/m}^4$
Breite	$b = 0,22 \text{ m}$	Porosität	$\phi = 0,98$
Dichte	$\rho = 2742 \text{ kg/m}^3$	Tortuosität	$\alpha_\infty = 1,7$
E-Modul	$E = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	Viskose charakteristische Länge	$\Lambda = 80 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Querdehnzahl	$\nu = 0,33$	Thermale charakteristische Länge	$\Lambda' = 160 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Verlustfaktor	$\eta = 0,007$	Dichte der Festkörperphase	
		im poroelastischen Medium	$\rho_1 = 30 \text{ kg/m}^3$
		E-Modul der Festkörperphase	$E = 5,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
		Querdehnzahl	$\nu = 0,35$
		Verlustfaktor	$\eta = 0,1$

(a) Daten Aluminiumplatte

(b) Daten poroelastischer Schaum (nach [41])

Tabelle 5.1: Abmessungen und Materialparameter

nem poroelastischen Material (in diesem Fall einem Schaum) kombiniert, indem es auf der nicht angeregten Plattenseite aufgebracht wird (Abbildung 5.1(b)). Materialparameter und Dicke sind in Tabelle 5.1(b) aufgeführt. An den Rändern ist das poroelastische Material gelenkig gelagert, wobei zusätzlich Verschiebungen senkrecht zur Platte zulässig sind. Für den ersten in [41] untersuchten Fall wird der Fluiddruck im poroelastischen Material auf der der Platte gegenüberliegenden Seite zu Null gesetzt, so dass dort eine Dirichlet-Bedingung vorgegeben wird, die das Schwingungsverhalten *in vacuo* abbildet. Im zweiten Fall wird ein Luftraum an das poroelastische Material angeschlossen, der auf der der Konstruktion abgewandten Seite als Randbedingung die *Impedanz* von Luft erhält ($Z_0 = 415 \text{ Ns/m}^3$), so dass näherungsweise die Reflexion von Wellen an diesem Rand unterbunden wird.

Die Simulation mittels FEM erfolgt für den Frequenzbereich von 10 bis 500 Hz. Die Aluminiumplatte wird durch zweidimensionale Schalenelemente abgebildet (siehe Abschnitt 3.2), das poroelastische Material durch dreidimensionale Elemente (siehe Abschnitt 3.2.4). Beide Elementtypen verwenden quadratische Ansatzfunktionen. Für jede Frequenz wird die Auslenkung der Platte als mittlere quadratische Verschiebung ermittelt und in die Plattengeschwindigkeit umgerechnet.

Der Darstellung in Dezibel [dB] liegt die übliche Umrechnungsformel zugrunde, die einen Verhältniswert für eine beliebige Größe X in Relation zu einer Bezugsgröße X_0 liefert.

$$X [\text{dB}] = 10 \log \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 = 20 \log \frac{X}{X_0} \quad (5.1)$$

Bei akustischen Betrachtungen werden als Bezugswerte die Größen an der Hörschwelle gewählt. Der Referenzschalldruck p_0 ergibt sich somit zu $2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$ für den Schalldruckpegel L_p , die zugehörige Partikelgeschwindigkeit v_0 zu $5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$.

Die Abbildung 5.2 stellt zunächst die Ergebnisse von Debergue *et al.* denen mit dem In-House-Code *ElPaSo* [15] ermittelten gegenüber. Verwendet wird dabei eine Diskretisierung mit 23 Elementen in Längenrichtung, 17 Elementen in Breitenrichtung und vier Elementen in Dickenrichtung des poroelastischen Materials.

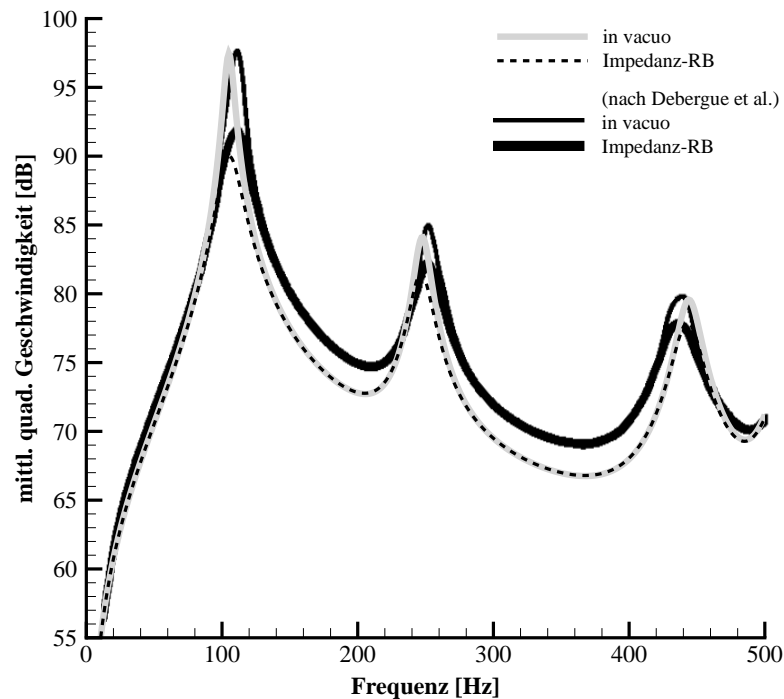


Abbildung 5.2: Vergleich der Ergebnisse nach Debergue *et al.* [41] mit denen durch den In-House-Code *ElPaSo* ermittelten

Zu erkennen ist eine generelle Übereinstimmung der Ergebnisse. Die Lage der Eigenfrequenzen und die Größe der Auslenkungen an den Eigenfrequenzen stimmen gut überein, ebenso die Verläufe bis zur ersten Eigenfrequenz. Die Abweichungen im höheren Frequenzbereich erklären sich aus der Diskretisierung, die dem Kriterium von sechs Stützstellen pro Wellenlänge nur bis 300 Hz genügt (siehe folgender Abschnitt 5.2).

Für die auftretenden Abweichungen zwischen den Peaks lassen sich keine offensichtlichen Erklärungen anführen. Möglicherweise sind die differierenden Ergebnisse bedingt durch geringfügige Unterschiede in der numerischen Implementierung der Elemente, die sich im Schwingungsverhalten bei Anregung abseits der Eigenfrequenzen zeigen.

Im Weiteren werden nur die Ergebnisse des *in vacuo*-Falls betrachtet. Abbildung 5.3 zeigt deutlich die Wirkung einer poroelastischen Schicht auf. Über das gesamte betrachtete Frequenzspektrum lässt sich eine generelle Reduzierung der Schwingungsgeschwindigkeiten erkennen, insbesondere die Geschwindigkeitsspitzen an den Eigenfrequenzen der Platte werden gedämpft. Des Weiteren ist eine Verschiebung der Lage der Eigenfrequenzen zu beobachten, sowohl in Richtung niedrigerer als auch höherer Frequenzen. Das Aufbringen einer poroelastischen Schicht ist somit nicht ausschließlich mit der Erhöhung von struktureller Dämpfung gleichzusetzen, sondern bedeutet vielmehr eine Änderung des strukturellen Gesamtverhaltens.

Die Beeinflussung des strukturellen Gesamtverhaltens ist abhängig von den Eigenschaf-

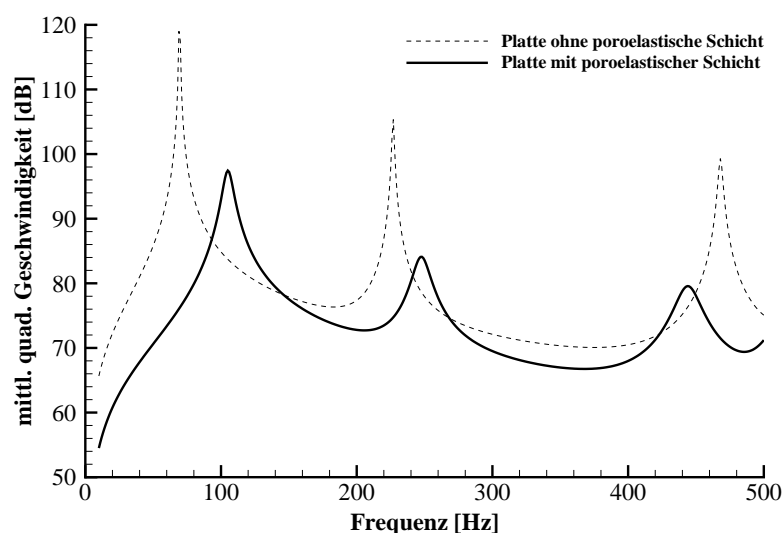


Abbildung 5.3: Mittlere Plattengeschwindigkeit mit und ohne poroelastische Schicht

ten des poroelastischen Materials. In Abbildung 5.4 sind zum Vergleich die Ergebnisse dargestellt, wenn die Aluminiumplatte anstatt mit dem oben spezifizierten Schaum mit Mineralwolle oder Filz kombiniert wird. Die Materialdaten sind der Literatur entnommen und in Tabelle 5.2 angegeben.

Es ist zu erkennen, dass die Kombination der Platte mit Mineralwolle mit hohem Elastizitätsmodul ($E = 4,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$) gegenüber der Kombination mit dem Schaum ($E = 5,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$) zu einem steiferen Gesamtsystem führt, so dass sich die erste Eigenfrequenz des Systems nach rechts verschiebt. Umgekehrt ergibt die Kombination mit Filz ein deutlich weiches Gesamtsystem, dessen erste Eigenfrequenz zu den niedrigeren Frequenzen hin verschoben ist. Der Verlauf für die Kombination Platte/Filz fast ohne erkennbare Eigenfrequenzen nach dem

	Mineralwolle (nach [3])	Filz (nach [13])
Strömungswiderstand	$\sigma = 40000 \text{ Ns/m}^4$	$\sigma = 33000 \text{ Ns/m}^4$
Porosität	$\phi = 0,94$	$\phi = 0,98$
Tortuosität	$\alpha_\infty = 1,6$	$\alpha_\infty = 1,1$
Viskose charakteristische Länge	$\Lambda = 56 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$\Lambda = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Thermale charakteristische Länge	$\Lambda' = 110 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$\Lambda' = 110 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Dichte der Festkörperphase im poroelastischen Medium	$\rho_1 = 130 \text{ kg/m}^3$	$\rho_1 = 60 \text{ kg/m}^3$
E-Modul der Festkörperphase	$E = 4,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$	$E = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
Querdehnzahl	$\nu = 0$	$\nu = 0$
Verlustfaktor	$\eta = 0,1$	$\eta = 0,88$

Tabelle 5.2: Parameter von poroelastischen Materialien aus der Literatur

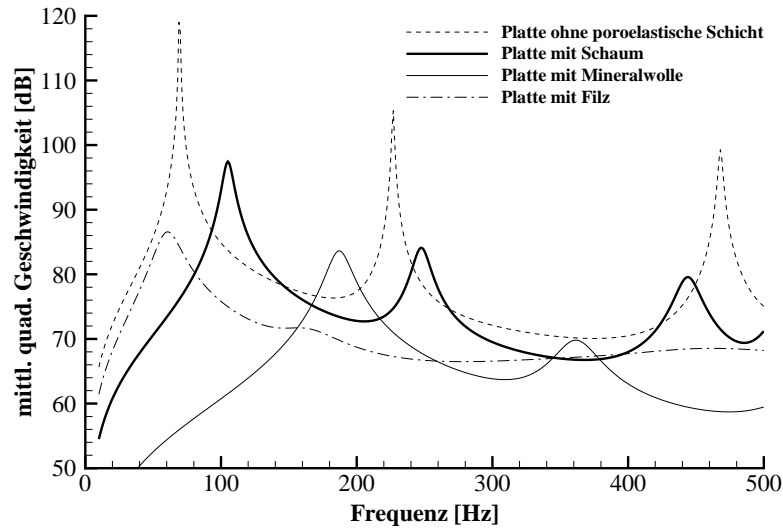


Abbildung 5.4: Mittlere Plattengeschwindigkeit für die Kombination mit verschiedenen poroelastischen Materialien

ersten Peak erklärt sich durch den Verlustfaktor von $\eta = 0,88$, der im Vergleich zu Angaben bezüglich anderer poroelastischer Materialien sehr hoch erscheint.

5.2 Diskretisierung von poroelastischem Material

Um bei FE-Simulationen im Frequenzbereich den Wellencharakter wiederzugeben, ist das Gebiet mit mindestens sechs Knoten pro Wellenlänge λ zu diskretisieren. Da die Wellenlänge mit der Frequenz abnimmt ($\lambda = c/f$), muss sich die Diskretisierung jeweils nach der höchsten interessierenden Frequenz richten.

Dieses gilt uneingeschränkt für die Diskretisierung von poroelastischem Material. Zu beachten ist, dass sich gemäß der poroelastischen Materialformulierung nach Biot (siehe Abschnitt 2.4) drei unterschiedliche Wellen im Material ausbreiten.

Die Wellenlängen der Kompressionswellen und der Scherwelle können aus den Potentialformulierungen für die Kompressionswellen beziehungsweise Rotationswellen hergeleitet werden [3]. Neben der Kreisfrequenz ω und den Parametern P , Q und R (Gl. 2.43 – 2.45) gehen die frequenzabhängigen Dichtekoeffizienten $\tilde{\rho}_{11}$, $\tilde{\rho}_{12}$ und $\tilde{\rho}_{22}$ (Gl. 2.64 – 2.66) ein. In Tabelle 5.3 sind die Wellenlängen für die drei Wellen des im vorigen Abschnitt verwendeten poroelastischen Schaums für verschiedene Frequenzen exemplarhaft aufgeführt. Deutlich ist zu erkennen, dass die Fluid-Dichtewelle die kleinste Wellenlänge aufweist. Die Diskretisierung muss sich entsprechend nach dieser Größe richten.

Im Folgenden wird ein plattenartiges poroelastisches Bauteil der Länge $a = 0,22$ m, der Breite $b = 0,35$ m und der Dicke $d = 0,05$ m durch senkrechten Schalleinfall von ebenen Wellen der Amplitude $P = 1$ N/m² belastet. Die Einleitung des Schalls in das poroelastische Bauteil

		100 Hz	200 Hz	300 Hz	400 Hz	500 Hz
Strukturelle Dichtewelle	λ_1	2,424	1,212	0,8082	0,6061	0,4849
Fluid-Dichtewelle	λ_2	0,09695	0,05757	0,04243	0,03417	0,02888
Schubwelle	λ_3	0,5988	0,4794	0,3196	0,2397	0,1918

Tabelle 5.3: Wellenlängen (in [m]) im poroelastischen Material gemäß Tabelle 5.1(b)

erfolgt mittels der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Kopplung, wobei unter Annahme eines üblichen poroelastischen Materials der Druck im akustischen Fluid dem der Fluidphase des poroelastischen Materials gleichgesetzt wird. Das Material ist an den Kanten der dem Schalleinfall abgewandten Seite gelenkig gelagert. Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abbildung 5.5 dargestellt.

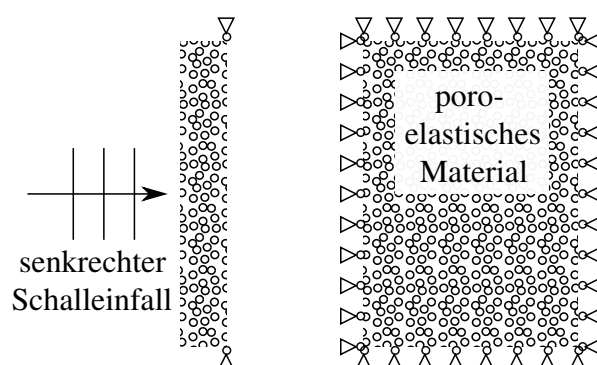


Abbildung 5.5: Versuchsaufbau (Schnitt und Aufsicht)

Zur Betrachtung des Konvergenzverhaltens erfolgt die FE-Simulation mit vier verschiedenen Diskretisierungen. Im ersten Fall werden die Elemente des Netzes durch lineare Ansatzfunktionen beschrieben, in den anderen drei Konfigurationen kommen jeweils quadratische Ansatzfunktionen für die einzelnen Elemente zum Einsatz. Maßgeblich für die Einhaltung des Kriteriums von mindestens sechs Knoten pro Wellenlänge ist der maximale Knotenabstand in einer Diskretisierung. Der Aufbau der Netzdiskretisierungen sowie der jeweils maximale Knotenabstand sind in Tabelle 5.4 aufgelistet.

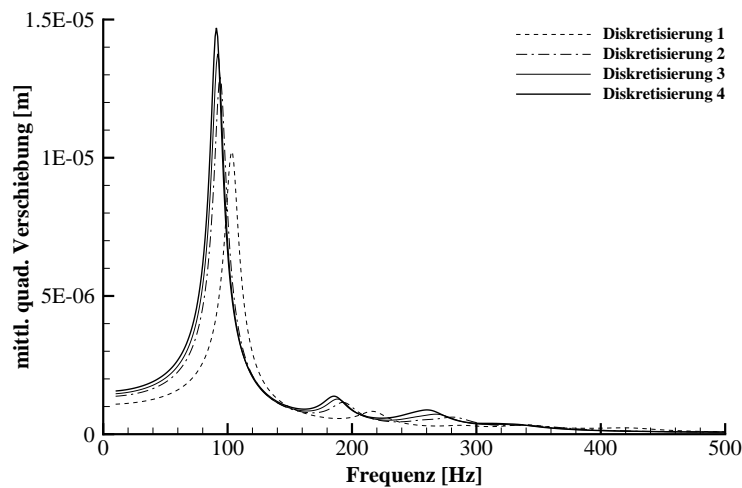
Ein Vergleich der Diskretisierungen mit der bestimmenden Wellenlänge zeigt, dass die Diskretisierung 1 (lineare Ansatzfunktionen) bereits bei 100 Hz der Kriteriumsbedingung nicht

Diskretisierung (Ansatzfunktionen)	Anzahl der Elemente auf			max. Knotenabstand [m]
	a	b	d	
1 (linear)	11	15	3	0,02333
2 (quadratisch)	11	15	3	0,01167
3 (quadratisch)	17	23	4	0,00761
4 (quadratisch)	22	30	5	0,00583

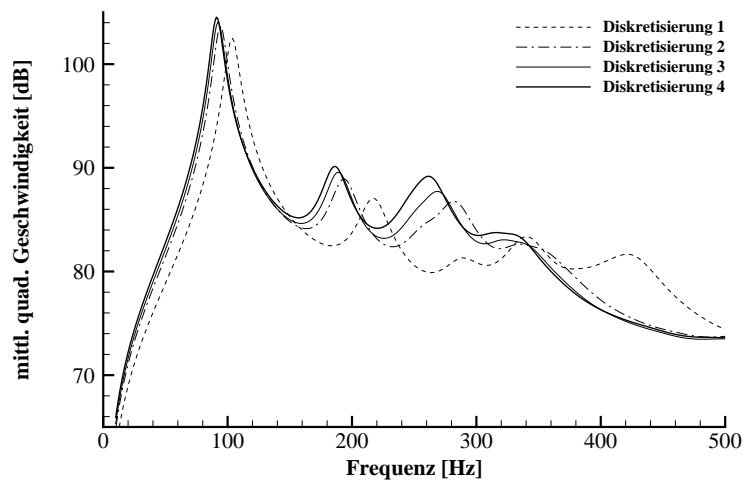
Tabelle 5.4: Verwendete Diskretisierungen

mehr genügt. Die Diskretisierung 2 (quadratische Ansatzfunktionen) ist bis zu knapp 200 Hz ausreichend, Diskretisierung 3 bis knapp 300 Hz. Die Diskretisierung 4 bietet ausreichende Genauigkeit bis annähernd 400 Hz. Den für 500 Hz erforderlichen Maximalabstand der Knoten von $\lambda/6 = 0,0048$ m weist keine der vier Konfigurationen auf.

Dieses Verhalten zeigt auch die Auswertung der vier FE-Simulationen auf. Wie im vorigen Abschnitt wird für jede Frequenz die Auslenkung des plattenartigen Bauteils ermittelt und zwar gemittelt über die Knoten in der Ebene der gelenkigen Einspannung. Während die mittleren quadratischen Verschiebungen relativ ähnlich erscheinen (Abbildung 5.6(a)), zeigen sich in



(a) Mittlere quadratische Verschiebung



(b) Mittlere quadratische Geschwindigkeit

Abbildung 5.6: Ergebnisse verschiedener Diskretisierungen

der Darstellung der Plattengeschwindigkeit die Abweichungen deutlicher (Abbildung 5.6(b)).

Des Weiteren ist zu erkennen, dass zusätzlich zu dem vorgenannten Kriterium eine feinere Diskretisierung die Ergebnisgenauigkeit erhöht. Die Diskretisierung mit sechs Knoten pro Wellenlänge erlaubt zwar die Nachbildung eines charakteristischen wellenförmigen Verlaufs, trifft aber möglicherweise nicht die Extremalwerte. Dieses wird durch verfeinerte Netze erreicht. Ein Beispiel für dieses Verhalten zeigen die Verläufe am ersten Peak um die Frequenz von 95 Hz.

5.3 Vergleich der Kopplungsbedingungen auf Basis der Druckkomponente

Die im Rahmen dieser Arbeit erstellte Kopplung von Strömung und poroelastischem Material ist in Abschnitt 4.3 erläutert. In der FE-Formulierung werden elementweise je Kopplungsfläche die Größen der Strömung (Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}^c und Druck p^c) mit den Größen des poroelastischen Materials (Verschiebungsvektor der Festkörperphase \mathbf{u}^s und Druck der Fluidphase p^f) in Beziehung gesetzt.

Unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit der Strömung \mathbf{v}^c Null beträgt, wird der verbleibende Druck p^c sowohl auf den Druck der Fluidphase p^f als auch die Verschiebungen der Festkörperphase \mathbf{u}^s umgelegt. Dieses steht im Gegensatz zur Kopplung eines akustischen Fluids mit einem poroelastischen Material, bei der (für übliche poroelastische Materialien) akustischer Druck p^{af} und Druck der Fluidphase p^f gleichgesetzt werden und keine Berücksichtigung der Festkörperphase erfolgt (siehe Abschnitt 4.2.2).

Es ist daher davon auszugehen, dass ein Vergleich der beiden Kopplungsbedingungen abweichende Ergebnisse aufzeigt. Im Folgenden wird die neu formulierte und implementierte Kopplung (Kapitel 4.3) mit der Kopplung aus Abschnitt 4.2.2 (poroelastisches Material – akustisches Fluid) verglichen und zwar für den Fall, dass in der Strömung keine Geschwindigkeiten vorhanden sind und somit lediglich der Druck p^c wirkt.

Die erste Variante (Variante 1) verwendet die Kopplungsbedingungen für die Interaktion zwischen einem poroelastischen Material und einem akustischen Fluid. Dieses entspricht der im vorigen Abschnitt verwendeten Kopplung: Ein poroelastisches Material wird durch senkrechten ebenen Schalleinfall der Amplitude P belastet. Das sich in der FE-Formulierung ergebende Gleichungssystem lautet für die belasteten Knoten (beziehungsweise Kopplungsknoten)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ss} - \omega^2 \mathbf{M}^{ss} & -\mathbf{C}^{sf} \\ -\omega^2 \mathbf{C}^{fs} & \mathbf{K}^{ff} - \omega^2 \mathbf{M}^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{p}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_P \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

wobei \mathbf{f}_P der sich aus der ebenen Schallwelle ergebende Lastvektor ist. Die weiteren Terme sind in Abschnitt 3.2.4 erläutert. Für übliche poroelastische Materialien ist das Gleichsetzen von Schalldruck der einfallenden Welle und Druck in der Fluidphase des poroelastischen Mediums $P = p^f$ zulässig (siehe Abschnitt 4.2.2).

Die zweite Variante (Variante 2) verwendet die Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 4.3, die die Interaktion eines poroelastischen Materials mit einer Strömung beschreiben. Unter Berücksichtigung der sich für die Elementmatrix ergebenden Einträge lautet das Gleichungssy-

stem für die Knoten der Grenzfläche

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ss} - \omega^2 \mathbf{M}^{ss} - \mathbf{U}_G & -\mathbf{C}^{sf} + \mathbf{D}_G \\ -\omega^2 \mathbf{C}^{fs} - \mathbf{U}_T - \mathbf{U}_V & \mathbf{K}^{ff} - \omega^2 \mathbf{M}^{ff} + \mathbf{D}_N - \mathbf{D}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{p}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_G \mathbf{p}^c \\ \mathbf{P}_N \mathbf{p}^c \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Als Untersuchungsbeispiel dient das gelenkig gelagerte poroelastische plattenartige Bauteil aus dem vorigen Abschnitt. In der ersten Variante unterliegt das poroelastische Bauteil einem senkrechten ebenen Schalleinfall mit einer Amplitude $P = 1 \text{ N/m}^2$. In der zweiten Variante wird es mit fiktiven Strömungswerten beaufschlagt, wobei die Geschwindigkeiten zu Null gesetzt werden und der Druck einheitlich $p^c = 1 \text{ N/m}^2$ über alle Frequenzen beträgt. Diese “Strömung” wird auf der nicht eingespannten Seite des plattenartigen Bauteils aufgebracht (Abbildung 5.7). Die Belastung in beiden Varianten ist somit gleich. Das poroelastische Material ist der bereits in Tabelle 5.1(b) spezifizierte Schaum.

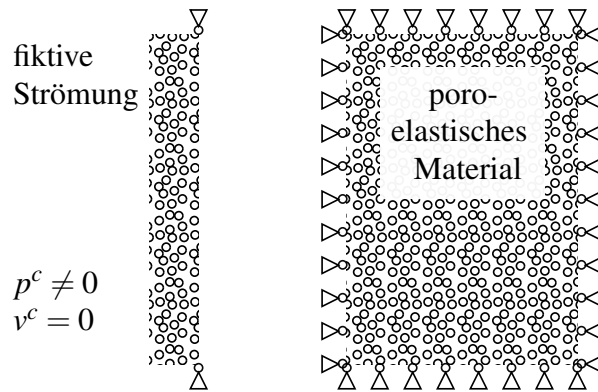
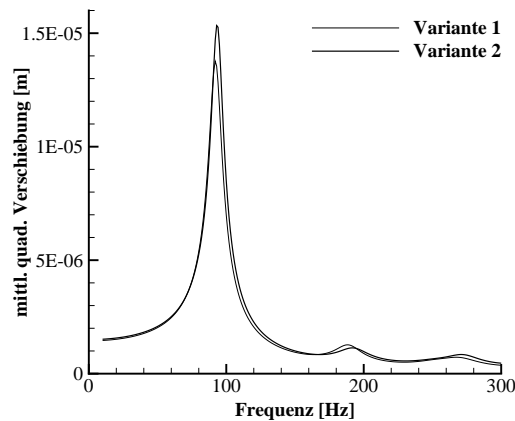


Abbildung 5.7: Versuchsaufbau mit Aufbringung einer fiktiven Strömung auf der nicht gelagerten Bauteilseite (Schnitt und Aufsicht)

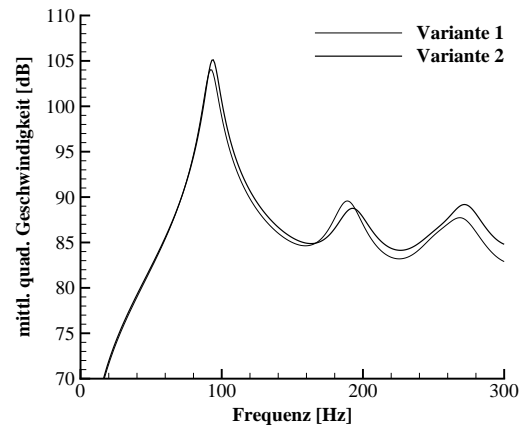
Die Auswertung erfolgt wie in den vorangehenden Beispielen je Frequenz über die gemittelte Auslenkung des Bauteils in der Ebene der gelenkigen Einspannung. Abbildung 5.8 zeigt die Ergebnisse für die Diskretisierung 3 (bis 300 Hz) und Diskretisierung 4 (bis 400 Hz).

Die Auswertung der Simulationsexperimente bestätigt, dass bei genereller Ähnlichkeit der Ergebnisse im Detail Abweichungen vorhanden sind. Zu erkennen ist, dass unter Verwendung der neuen Kopplungsbedingungen die gemittelte Auslenkung bei der ersten Eigenfrequenz höher ausfällt, bei der zweiten geringfügig kleiner. Zudem ist eine leichte Verschiebung der Eigenfrequenzen zu höheren Frequenzen hin zu beobachten. Die aus den Kopplungsbedingungen resultierenden Einträge in die einzelnen Elementmatrizen führen somit zu einer Versteifung des Systems. Besonders auffällig ist, dass mit zunehmender Frequenz die Auslenkungen unter Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 4.3 größer ausfallen. Hier scheint sich die Berücksichtigung der Festkörperphase in der Kopplung deutlich zu zeigen. Die direkte Anregung der Festkörperphase führt zu höheren Auslenkungen als bei einer lediglich durch den Fluiddruck induzierten Beeinflussung, die zudem durch die Effekte der Fluidreibung im poroelastischen Material abgeschwächt wird.

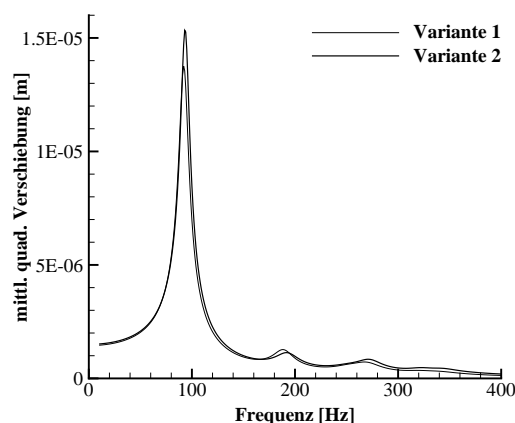
Im Folgenden kommen statt des Schaums eine Mineralwolle und ein Filz als poroelastisches Material zur Anwendung bei ansonsten gleichem Versuchsaufbau. Die Simulation erfolgt



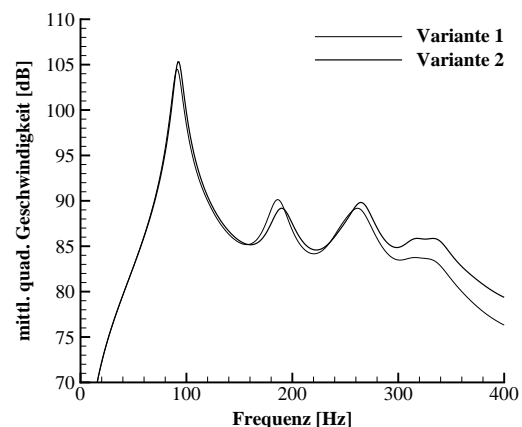
(a) Diskretisierung 3: mittlere quadratische Verschiebung



(b) Diskretisierung 3: mittlere quadratische Geschwindigkeit



(c) Diskretisierung 4: mittlere quadratische Verschiebung

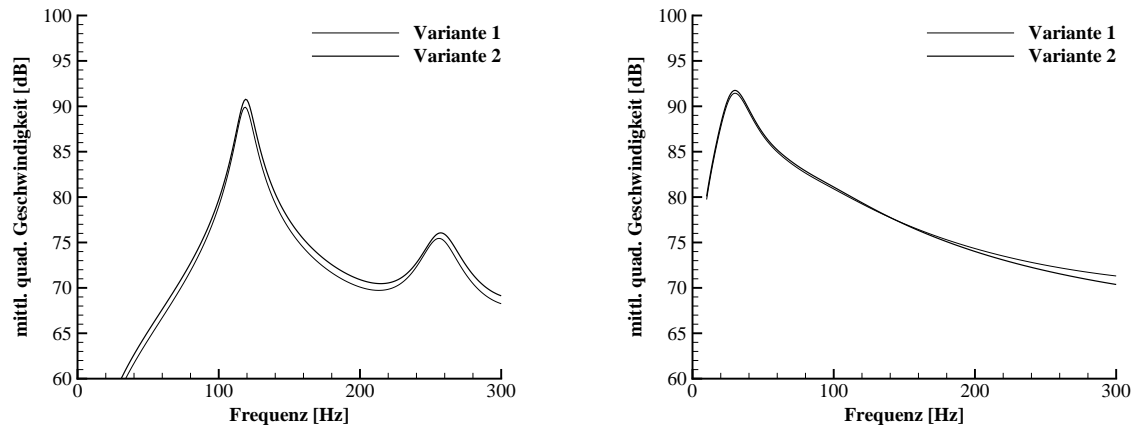


(d) Diskretisierung 4: mittlere quadratische Geschwindigkeit

Abbildung 5.8: Vergleich der Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 4.2.2 (Variante 1) und 4.3 (Variante 2)

mit der Diskretisierung 3. Abbildung 5.9 zeigt die Ergebnisse für die Variante 1 (Kopplungsbedingungen nach Kapitel 4.2.2) und Variante 2 (Interaktion gemäß Kapitel 4.3). Dargestellt ist die mittlere quadratische Geschwindigkeit des Bauteils in der Ebene der Einspannung.

Auch hier lassen sich Abweichungen zwischen den beiden Kopplungsvarianten erkennen. Im Fall der Mineralwolle nach Tabelle 5.2 lassen sich für die Variante 2 über den gesamten betrachteten Frequenzbereich höhere Auslenkungen beobachten (siehe Abbildung 5.9(a)). Eine Versteifung des Systems durch Verschiebung der Eigenfrequenzen zu höheren Frequenzen ist nur in geringem Maße erkennbar. Innerhalb des zugrundeliegenden Frequenzbands ist eine



(a) Mineralwolle: mittlere quadratische Geschwindigkeit

(b) Filz: mittlere quadratische Geschwindigkeit

Abbildung 5.9: Vergleich der Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 4.2.2 (Variante 1) und 4.3 (Variante 2) bei Verwendung von Materialien nach Tabelle 5.2

Zunahme der Auslenkung bei höheren Frequenzen nicht mit Sicherheit festzustellen.

Bei der Verwendung eines Filzmaterials (Materialparameter gemäß Tabelle 5.2) zeigen sich zunächst kaum Abweichungen in den Kopplungsbedingungen nach Kapitel 4.2.2 und 4.3 (siehe Abbildung 5.9(b)). Da sich nur die erste Eigenfrequenz deutlich ausgeprägt zeigt, kann über eine mögliche Versteifung des Systems bei Berücksichtigung der implementierten Kopplungsbedingungen keine Aussage getroffen werden. Mit zunehmender Frequenz ergeben sich in diesem Fall kleinere Auslenkungen mit den Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 4.3. Möglicherweise ist dies durch den ausgesprochen hohen Verlustfaktor ($\eta = 0,88$) erklärbar.

Festzuhalten ist, dass beide Kopplungsvarianten den prinzipiellen Ergebnisverlauf wiedergeben. Die neu formulierten Kopplungsbedingungen nach Kapitel 4.3 erlauben aufgrund ihrer Formulierung, die sowohl die Fluid- als auch die Festkörperphase des poroelastischen Materials einbezieht, eine detailliertere Berücksichtigung der Verhältnisse an einer Grenzfläche.

5.4 Einfluss des tangentialen Kopplungsparameters

Die in Kapitel 4.3 aufgestellten Interaktionsbedingungen enthalten für die Kopplung der Tangentialkomponente eine Konstante, die sich nicht unmittelbar auf Basis von Materialdaten ableiten lässt. Der *slip rate coefficient* α aus der Beavers-Joseph-Saffman-Bedingung (Gl. 4.35) beziehungsweise der korrespondierende Parameter γ aus der Formulierung nach Badia *et al.* (Gl. 4.42) beruhen auf Messwerten. Neale und Nader [102] zeigen neben einer theoretischen Bestimmung der Größe α , dass bei praktischen Anwendungen für den Koeffizienten $\alpha = 1$ vereinfacht angenommen werden kann. Dieses entspricht den Messungen von Beavers und Jo-

seph [14], die für die von ihnen untersuchten Materialien (Metallschäume und Aluminiumoxide) Werte für α im Bereich von 0,1 bis 4,0 angeben.

Der Koeffizient α lässt sich in den Parameter γ umformen, indem die Beavers-Joseph-Saffman-Bedingung mit der dynamischen Viskosität des strömenden Mediums multipliziert wird und so die ursprüngliche Geschwindigkeitsableitung in eine Spannung überführt wird.

$$\gamma = \alpha \cdot \mu \quad (5.4)$$

Die Permeabilität K des poroelastischen Mediums bestimmt sich aus dem Verhältnis von dynamischer Viskosität und Strömungswiderstand (siehe [3]).

$$K = \frac{\mu}{\sigma} \quad (5.5)$$

Für $\alpha = 1$ nimmt γ die Größe der dynamischen Viskosität an, und der Vorfaktor γ/\sqrt{K} bestimmt sich zu $\sqrt{\sigma \cdot \mu}$.

Die folgenden Studien sollen den Einfluss des Koeffizienten α auf die Kopplung von Strömung und poroelastischem Material aufzeigen. Dazu wird wie im vorangegangenen Abschnitt das gelenkig gelagerte poroelastische Bauteil mit einer fiktiven Strömung beaufschlagt. In diesem Fall beträgt der Druck im strömenden Medium einheitlich Null $p^c = 0$, während parallel zur Bauteiloberfläche in einer Richtung eine Geschwindigkeit $v^c = 1$ m/s über alle Frequenzen vorgegeben ist. In der Ebene der gelenkigen Einspannung wird das Bauteil nun vollständig fixiert, so dass dort keine Verschiebungen zugelassen werden. Abbildung 5.10 zeigt schematisch den Aufbau.

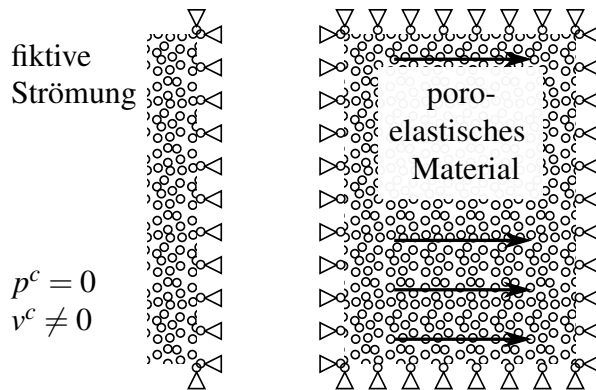


Abbildung 5.10: Versuchsaufbau mit Aufbringung einer fiktiven Strömung auf der nicht gelagerten Bauteilseite (Schnitt und Aufsicht), Vorgabe einer Geschwindigkeit parallel zur Bauteiloberfläche

Für den Koeffizienten α werden die Werte 0,1, 1,0 und 4,0 gewählt. Die Simulationen erfolgen mit drei unterschiedlichen Materialien: einem Schaum (nach Tabelle 5.1(b)), einer Mineralwolle und einem Filz (nach Tabelle 5.2). Verwendet wird die Diskretisierung 3 (siehe Tabelle 5.4), die bis zu einer Frequenz von 300 Hz den Wellencharakter der maßgeblichen Welle im poroelastischen Material abbildet.

Die gemittelten quadratischen Auslenkungen der von der Strömung erfassten Oberfläche des Bauteils sowie die mittlere quadratische Geschwindigkeit (bezogen auf die Referenzgeschwindigkeit von $v_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ m/s) sind in Abbildung 5.11 gegeben.

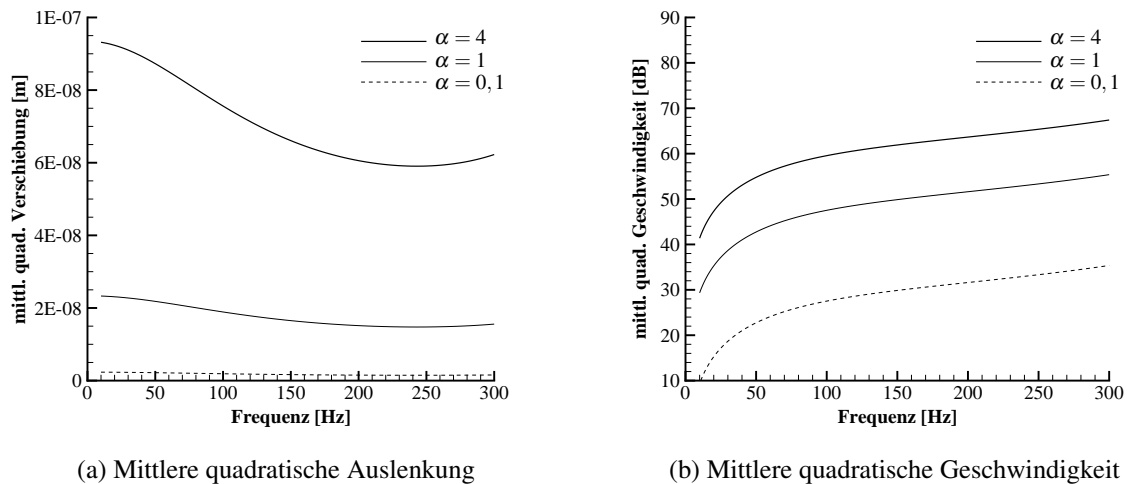


Abbildung 5.11: Ergebnisse für einen Schaum nach Tabelle 5.1(b) bei verschiedenen Werten für den Parameter α

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Auslenkungen direkt mit der Größe des Parameters α skalieren, so dass im hier betrachteten Bereich von α bei gleicher Anregung die Auslenkungen um den Faktor 40 variieren. Eine Schwankungsbreite in solcher Größenordnung ist für dezidierte Aussagen über das Schwingungsverhalten eines Bauteils nicht akzeptabel. Für die korrekte Abbildung des Geschwindigkeitseinflusses bei der Kopplung von Strömung und poroelastischem Material ist es deshalb unerlässlich, diesen Koeffizienten richtig zu bestimmen.

Im Folgenden sollen die Anteile der Auslenkungen in die drei Raumrichtungen betrachtet werden. Die Darstellung der Auslenkungen nach ihren Anteilen normal zur Bauteiloberfläche, parallel zur Bauteiloberfläche in Richtung der Strömung und parallel zur Bauteiloberfläche senkrecht zur Strömungsrichtung zeigt, dass trotz Vorgabe einer tangentialen Geschwindigkeit die Normalauslenkungen den größten Teil der Verschiebung ausmachen. Für den poroelastischen Schaum mit dem Koeffizienten $\alpha = 4$ sind die einzelnen Beiträge in Abbildung 5.12 dargestellt.

Diese Zusammensetzung erscheint zunächst fraglich, da der Krafteintrag über die Geschwindigkeit der Strömung tangential erfolgt. Die Auslenkungen in der tangentialen Ebene werden durch das poroelastische Bauteil selbst begrenzt. Die Auslenkungen normal zur Platte sind jedoch nicht eingeschränkt. Die Amplitude der Schwingung in Normalenrichtung nimmt somit höhere Werte an.

Der Einfluss des Koeffizienten α gilt unverändert bei der Verwendung anderer poroelastischer Materialien. Abbildung 5.13 zeigt bei gleichem Versuchsaufbau die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Bauteiloberfläche für Filz und Mineralwolle. Wie zuvor ergibt sich eine

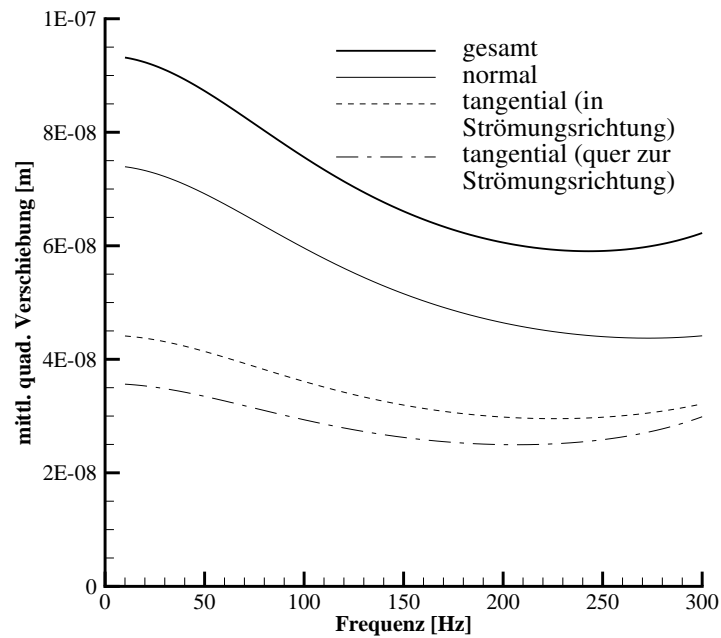
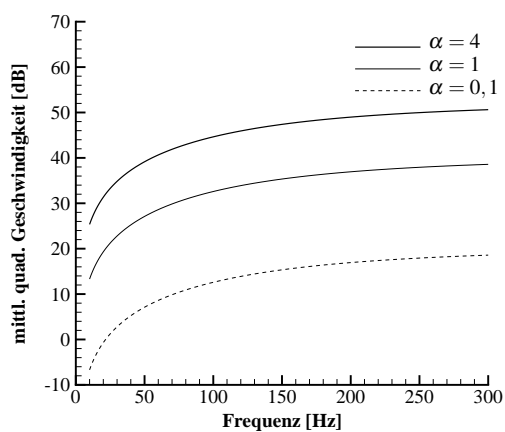
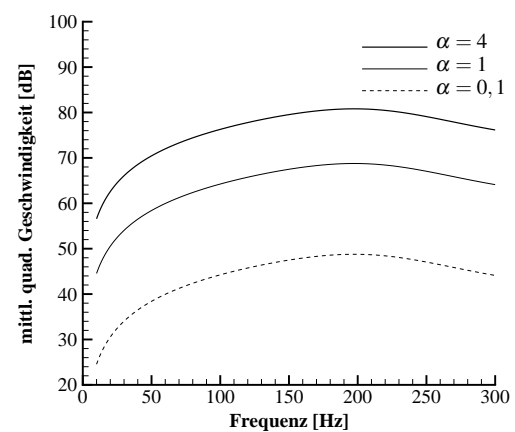


Abbildung 5.12: Schaum nach Tabelle 5.1(b), $\alpha = 4$: mittlere quadratische Auslenkung normal und tangential zur Bauteiloberfläche



(a) Mineralwolle nach Tabelle 5.2



(b) Filz nach Tabelle 5.2

Abbildung 5.13: Mittlere quadratische Geschwindigkeit bei verschiedenen Werten für den Parameter α

inakzeptabel hohe Schwankungsbreite, die keine Aussagensicherheit zulässt.

Ändert man den Versuchsaufbau so, dass wie in den vorigen Abschnitten nur die Kanten des Bauteils gelenkig eingespannt sind (siehe Abbildung 5.14(a)), ergeben sich die in den Abbildungen 5.14(b) – (d) dargestellten Geschwindigkeitsverläufe für die eingespannte Ebene. Die Ergebnisse sind ähnlich denen des vorangegangenen Beispiels (Abbildung 5.8 und 5.9). Die Peaks an den Eigenfrequenzen sind allerdings deutlich geringer ausgeprägt als noch bei der Belastung des poroelastischen Material mit Druck. Auffällig ist der Anstieg der Auslenkungsgeschwindigkeit für das Filzmaterial bei höheren Frequenzen. Wie zuvor skalieren die Auslenkungen mit dem tangentialen Kopplungsparameters α .

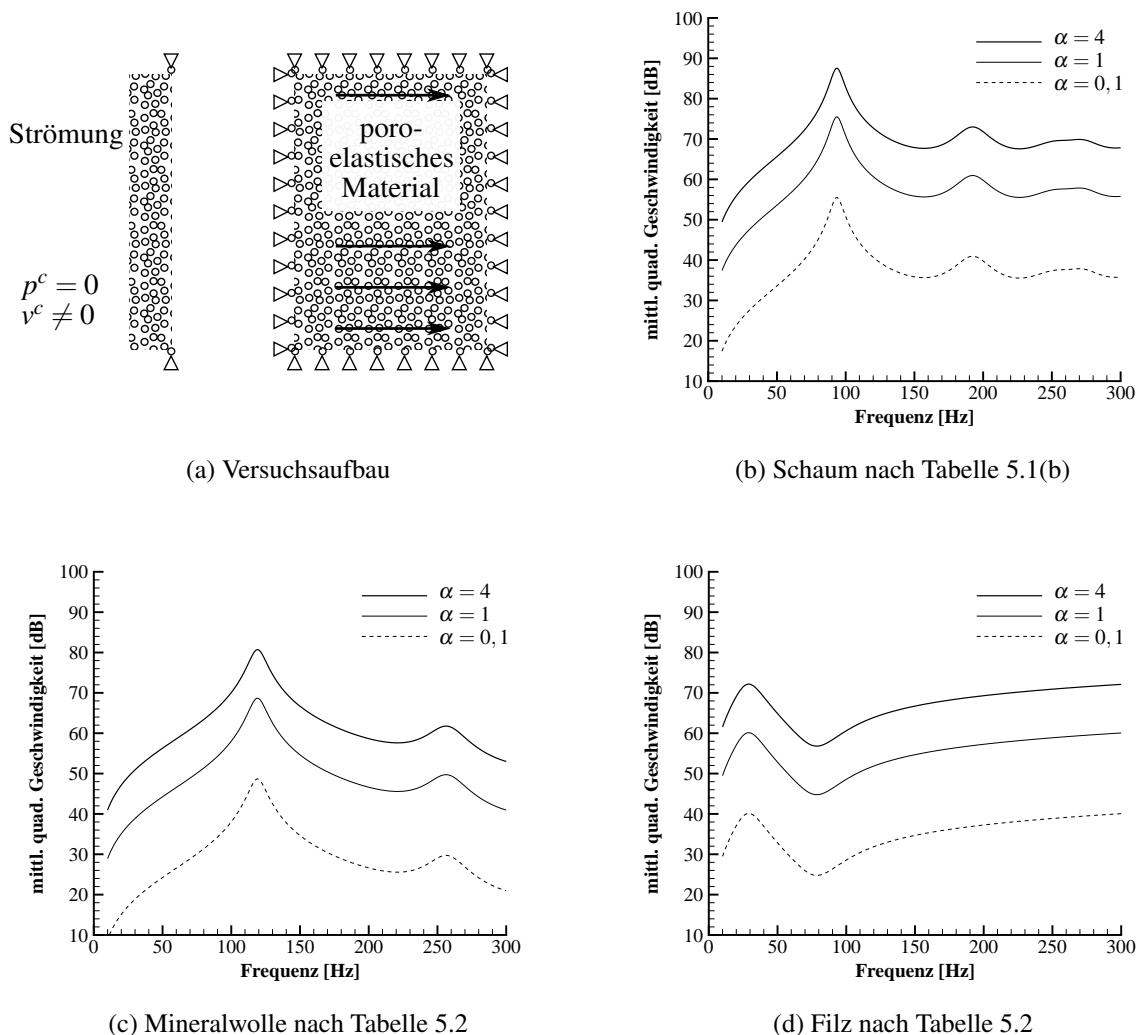


Abbildung 5.14: Versuchsaufbau mit gelenkiger Lagerung der Kanten des Bauteils und mittlere quadratische Geschwindigkeiten in der Ebene der Einspannung für verschiedene poroelastische Materialien und tangentialen Kopplungsparameter α

Der von Beavers und Joseph definierte Faktor α stellt einen entscheidenden Parameter für die Umsetzung der Kopplung einer Strömung mit einem poroelastischen Material dar. Die Verwendung von α in den beobachteten Größenordnungen führt auf nicht annehmbare Variationen in den Ergebnissen, so dass eine ausreichend genaue Bestimmung des Faktors α nötig ist, um zutreffende Ergebnisaussagen zu erzielen.

Unabhängig vom gewählten Koeffizienten α sind deutlich die Eigenfrequenzen zu erkennen. Die Art der Körperschalleinleitung (senkrecht durch Aufbringen eines Drucks oder tangential durch eine Geschwindigkeitsvorgabe) ist für das generelle Schwingungsverhalten eines poroelastischen Bauteils von untergeordneter Bedeutung. Erwartungsgemäß sind von wesentlichem Einfluss Geometrie und Lagerbedingungen.

5.5 Diskussion

In den vorangehenden Betrachtungen konnte eine zufriedenstellende Übereinstimmung der gemäß Kapitel 4.3 implementierten Kopplungsbedingungen mit einem in der Akustik üblichen Kopplungsmechanismus (siehe Kapitel 4.2.2) dargestellt werden. Da der übliche Kopplungsansatz vereinfachende Annahmen enthält, entsprechen die beobachteten Abweichungen der Erwartung. Die hier vorgenommenen Betrachtungen beschränken sich jedoch rein auf die Wirkung eines in der Strömung vorhandenen Drucks und beinhalten keine Strömungsgeschwindigkeiten.

Die für die Interaktion von Strömung und poroelastischem Material aufgestellten Kopplungsbedingungen enthalten einen Koeffizienten α , der in die tangentielle Komponente eingeht und dessen Einfluss im Rahmen der Plausibilitätsstudie deutlich darstellbar ist. Die Schwanungsbreite der unter Verwendung von in der Literatur angegebenen Werten ermittelten Ergebnisse ist so groß, dass eine zutreffende Bestimmung dieses Faktors erforderlich ist, um verlässliche Ergebnisse zu erzielen. Für die Bestimmung dieses Koeffizienten sind bisher Messaufbauten [14], analytische Herleitungen [102] oder fallweise Anpassungen (in [2]) zum Einsatz gekommen. Letztere können mittels Strömungssimulation durchgeführt werden. Für den Faktor wird ebenfalls ein Zusammenhang mit der Porengröße des Materials diskutiert [14]. In Ermangelung von Angaben bezüglich des Parameters α für poroelastische Materialien wird zunächst von der analytisch hergeleiteten Beziehung $\alpha = 1$ ausgegangen, die unter Beachtung der Erkenntnisse aus den vorangegangenen Studien sowie aus der Literatur jedoch nicht als zufriedenstellend angesehen werden kann.

Ebenso wie nur für wenige poroelastische Materialien die beschreibenden Materialangaben zur Verfügung stehen, existieren keine Parameterstudien zur Kopplung einer Strömung mit poroelastischem Material, mit denen ein dezidierter Abgleich der implementierten Interaktionen durchgeführt werden könnte. Auch finden sich keine Hinweise, ob die in einer realen Strömung vorliegenden Druckschwankungen maßgeblich für den Körperschalleintrag verantwortlich sind, oder ob die Hauptursache in der Geschwindigkeitsvariation liegt. Ist letzteres der Fall, so ist die zutreffende Bestimmung des Parameters α unerlässlich.

Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 880 finden Untersuchungen statt, bei denen auch die poroelastischen Materialparameter der betrachteten Materialien ermittelt werden. Im

Zusammenhang mit vorgesehenen Messexperimenten wird so eine Datenbasis zur Verfügung stehen, mit deren Hilfe ein Abgleich der mit dem hier vorgestellten Simulationsverfahren ermittelten Ergebnisse mit Messergebnissen erfolgen kann. Das Ziel ist, verlässliche Aussagen über die Kopplung von Strömung und poroelastischem Material zu erhalten und zu einer Validierung der Implementierung zu gelangen.

6 Beispiele mit Anwendungsbezug

Im diesem Kapitel wird dargestellt, wie das in den vorherigen Kapiteln erläuterte Verfahren zur Abbildung von strömungsinduziertem Körperschalleintrag zur Anwendung kommen kann. Dazu werden drei Beispiele aufgeführt, die exemplarhaft die Anwendbarkeit des gezeigten Verfahrens darstellen.

Ausgangspunkt für alle Beispiele ist das Vorhandensein einer Strömung, so dass zunächst kurz auf die Simulation der hier angesetzten Strömung und die Generierung der notwendigen Daten eingegangen wird. Danach wird im ersten anwendungsbezogenen Beispiel die strömungsinduzierte Schallabstrahlung von einem Bauteil und deren Beeinflussung durch poroelastische Materialien aufgezeigt. Im zweiten Beispiel liegt der Fokus auf der Körperschallweiterleitung bei strömungsinduziertem Schalleintrag und dessen Minderung durch Aufbringen von poroelastischen Materialien. Das dritte Beispiel stellt eine überströmte Hinterkante als Möglichkeit zum Einsatz poroelastischer Materialien vor. Betrachtet wird hierbei nicht die aeroakustische Wirksamkeit, sondern die Auswirkungen auf die Struktur.

6.1 Bereitstellung von Strömungsdaten

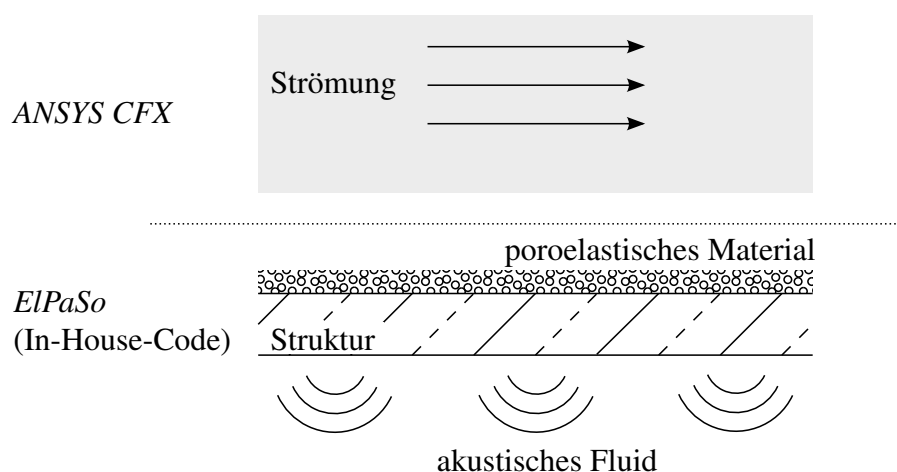


Abbildung 6.1: Separate Betrachtung der Strömung

Im Kapitel 4 ist erläutert, dass bei der Kopplung einer Strömung mit einer Struktur oder mit einem poroelastischen Material die Rückwirkungen auf die Strömung nicht berücksichtigt wer-

den. Es ist daher möglich, bei der Betrachtung des Gesamtsystems Strömung – Struktur – Schallabstrahlung oder Strömung – poroelastisches Material – Struktur – Schallabstrahlung die Strömung unabhängig von den anderen Teilsystemen abzubilden (siehe Abbildung 6.1). Die aus der Strömung resultierenden Größen stehen dann als Eingangsdaten für das verbleibende System zur Verfügung. Die Interaktion von Strömung mit dem angrenzenden Teilsystem ist somit nur einseitig als schwache Kopplung realisiert.

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Strömungssimulation mittels des kommerziellen Programmpakets *ANSYS CFX*. Diese CFD-Software basiert auf der Finite-Volumen-Methode und löst die Reynoldsgleichungen unter Ansatz eines Wirbelviskositätsmodells für die Turbulenzmodellierung (siehe Kapitel 2.1).

Zur Generierung von Strömungsdaten, die als Eingangswerte für die folgenden Anwendungsbeispiele dienen, wird eine kanalartige Geometrie herangezogen. Durch Setzen von entsprechenden Randbedingungen wird annähernd eine freie Strömung über einer Oberfläche modelliert. Um ein instationäres, das heißt sich zeitlich änderndes, Strömungsfeld zu erhalten, befindet sich auf der überströmten Oberfläche eine “Stolperschwelle”. Hinter dieser Stolperstelle bildet sich ein instationärer Wirbel aus. Die Strömungsdaten dieser zeitlichen Fluktuationen auf der Oberfläche bilden die Eingangsdaten für die Beispiele in den folgenden Abschnitten. Abbildung 6.2 zeigt das betrachtete Gebiet.

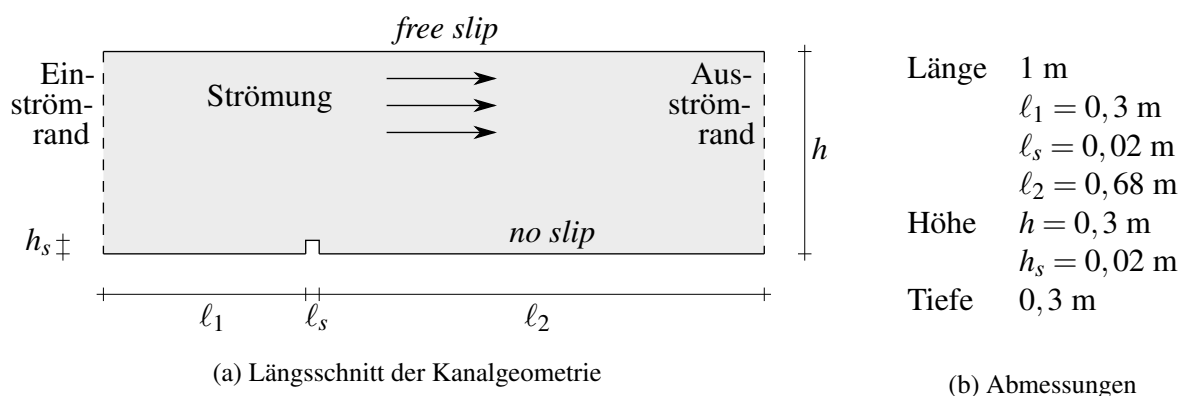


Abbildung 6.2: Geometrie zur Strömungssimulation

Als strömendes Fluid wird Luft angesetzt mit einer Dichte von $\rho = 1,185 \text{ kg/m}^3$ und der dynamischen Viskosität $\mu = 1,831 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$. Für die Luft werden am Einströmrand verschiedene Geschwindigkeiten v vorgegeben, während über den Ausströmrand gemittelt ein Druck p von Null erfüllt sein soll. Die Richtung der Strömung ist normal zum Einströmrand. Für die Wände des Kanals werden unterschiedliche Randbedingungen vorgegeben: Auf der Unterseite des Kanalquerschnitts ist die Haftungsbedingung einzuhalten, das heißt, dass die Fluidteilchen, die die Wand berühren, keine Geschwindigkeit tangential zur Wand haben (*no slip*). An der Oberseite des Kanals ist eine sogenannte *free slip* Bedingung vorgegeben, die besagt, dass durch die Wand die tangential Geschwindigkeit nicht eingeschränkt ist. Die Vorgabe der *free slip* Bedingung ermöglicht näherungsweise die Abbildung einer freien (nicht durch Ränder begrenzten) Strömung. Die Seitenwände erhalten sogenannte Spiegel- beziehungsweise Sym-

metrierandbedingungen, die durch die Reflexion von Fluidteilchen das betrachtete Gebiet so erscheinen lassen, als ob die gleichen Verhältnisse jenseits dieses Randes herrschen. Der hier untersuchte Kanal erscheint durch die Spiegelrandbedingungen somit unendlich in Tiefenrichtung.

Über den gesamten Einströmrand wird eine konstante Normalgeschwindigkeit des Fluids vorgegeben; die Haftbedingung an der Wand ist daher am Einströmrand nicht erfüllt. Beim Auftreffen auf die Stufe ist die Strömung für die betrachtete Geschwindigkeit $v = 20$ m/s laminar, während für $v = 50$ m/s die Grenzschicht in den turbulenten Bereich umgeschlagen ist. Das Strömungsgebiet wird mit 837600 Hexaederelementen diskretisiert.

Die Strömungssimulation erfolgt über einen Zeitraum von $T_{ges} = 1,5$ s mit einer Zeitschrittgröße von $\Delta t = 0,001$ s. Die letzten 1000 Zeitschritte werden herangezogen, um die im Zeitbereich vorliegenden Daten mittels schneller Fourier-Transformation in den Frequenzbereich umzuwandeln. Die diskrete Fourier-Transformation bei 1000 Zeitschritten mit $\Delta t = 0,001$ s erlaubt eine Überführung in Frequenzen von $f = 0$ Hz bis $f = 500$ Hz.

Um die Überströmung eines porösen Materials zu simulieren, wird der Versuchsaufbau modifiziert. Hinter der Stolperstelle wird anstatt der undurchlässigen Oberfläche ein poröses Material eingebaut, dessen Unterseite wieder als Wand spezifiziert ist. Abbildung 6.3 zeigt die Geometrie des Simulationsexperiments. Die Abmessungen entsprechen dem vorangegangenen Versuchsaufbau. Der Parameter h_p bezeichnet die Dicke des porösen Materials. Die Diskretisierung des porösen Materials erfolgt mit 81600 Hexaederelementen.

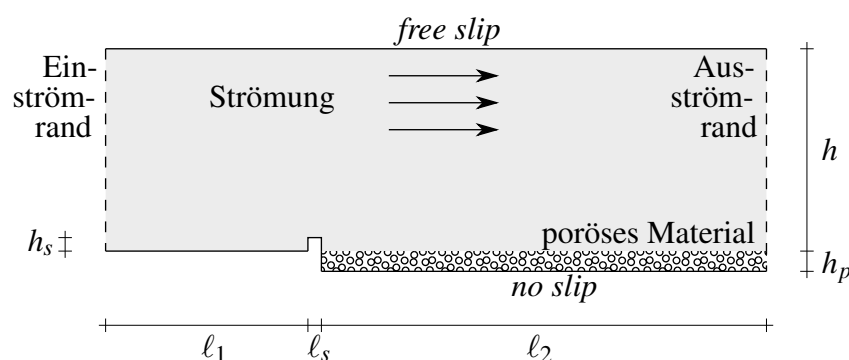


Abbildung 6.3: Geometrie zur Simulation der Überströmung eines porösen Materials (Längsschnitt)

Im Rahmen der Strömungssimulation mit *ANSYS CFX* wird das poröse Material lediglich durch seine Porosität spezifiziert; das Korngerüst wird als unbeweglich angenommen. Dieser Ansatz entspricht nicht der beabsichtigten Überströmung eines poroelastischen Materials (mit elastischer Festkörperphase), aber er wird hier als ausreichend angesehen, um ungefähre Strömungsgrößen zu generieren. Durch den schwachen Kopplungsansatz ist es möglich, bei zukünftigen Untersuchungen andere Verfahren zur Strömungssimulation einzubinden, so dass dadurch eine genauere Abbildung von realen Strömungen für die Simulation von Körperschalleintrag möglich sein kann.

Geschwindigkeit	Dicke und Porosität des porösen Materials				
	$h_p = 0 \text{ m}$	$h_p = 0,01 \text{ m}$		$h_p = 0,02 \text{ m}$	
		$\phi = 0,94$	$\phi = 0,98$	$\phi = 0,94$	$\phi = 0,98$
$v = 20 \text{ m/s}$	✓	✓	✓	✓	✓
$v = 50 \text{ m/s}$	✓	✓	✓	✓	✓

Tabelle 6.1: Konfigurationen der durchgeführten (✓) Strömungssimulationen

In den folgenden Beispielen wird auf die bereits im vorigen Kapitel zur Anwendung gekommenen poroelastischen Materialien Schaum (nach Tabelle 5.1(b)), Mineralwolle und Filz (nach Tabelle 5.2) zurückgegriffen. Die Porositäten dieser Materialien betragen $\phi = 0,98$ beziehungsweise $\phi = 0,94$. Tabelle 6.1 zeigt die verschiedenen Konfigurationen für die Strömungssimulationen auf.

Nach Abschluss der Berechnungen zur Strömungssimulation liegen für jeden Zeitschritt Daten für alle Knoten des diskretisierten Gebiets vor. Die relevanten Größen für die Kopplung (Druck p sowie die Geschwindigkeiten in allen drei Raumrichtungen v_i) werden für alle Knoten, die sich auf der Grenzfläche von Strömung und Struktur beziehungsweise von Strömung und poroelastischen Material befinden, exportiert und stehen im Weiteren als Eingangswerte für die nachfolgenden Beispiele zur Verfügung.

6.2 Strömungsinduzierte vibroakustische Schallabstrahlung

In diesem Beispiel wird die Schallabstrahlung einer durch eine Strömung angeregten Platte untersucht und die Auswirkungen bei Aufbringung einer poroelastischen Schicht untersucht.

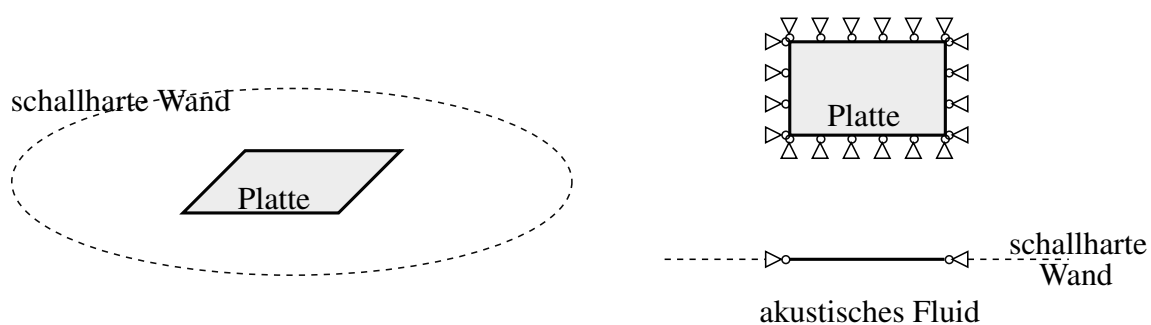


Abbildung 6.4: Versuchsaufbau zur strömungsinduzierten Schallabstrahlung einer Platte: in schallharte Wand eingebaute Platte (links), Platte in Aufsicht und Schnitt (rechts)

Abbildung 6.4 zeigt den Versuchsaufbau. Eine Aluminiumplatte ist gelenkig gelagert in eine schallharte Wand eingebaut. Die Ausdehnung der schallharten Wand ist als unendlich anzusehen. Die Platte und die schallharte Wand teilen das zu betrachtende Gebiet in zwei Teile:

Dicke	$d = 0,001 \text{ m}$	Dichte	$\rho = 2780 \text{ kg/m}^3$
Länge	$a = 0,40 \text{ m}$	E-Modul	$E = 7,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
Breite	$b = 0,24 \text{ m}$	Querdehnzahl	$\nu = 0,33$

Tabelle 6.2: Abmessungen und Materialdaten der gelenkig in eine schallharte Wand eingebauten Platte

einen unendlichen Halbraum, in den hinein die Schallabstrahlung der Platte erfolgt (im Querschnitt unterhalb der Platte), sowie den Bereich, aus dem die Anregung der Platte, beispielsweise durch eine Strömung, herrührt (im Schnitt oberhalb der Platte). Die Geometrie sowie die Materialparameter der Platte sind in Tabelle 6.2 angegeben.

Die Platte wird in der FE-Struktursimulation durch 20 Elemente in Längsrichtung und 12 Elemente in Querrichtung diskretisiert. Die BE-Simulation zur Ermittlung der Schallabstrahlung umfasst die Diskretisierung der Lasteinleitungsfläche und der umgebenden schallharten Wand. Die Diskretisierung der schallharten Wand beschränkt sich auf einen Kreis mit dem Radius $r = 0,5 \text{ m}$ um den Mittelpunkt der Platte. Dieses entspricht in etwa dem Ansatz von [85]. Für die Lasteinleitungsfläche wird die gleiche Diskretisierung mit 20 auf 12 Elementen zugrunde gelegt, die umgebende schallharte Wand ergibt sich aus insgesamt 418 Elementen. Alle Elementformulierungen basieren auf quadratischen Ansatzfunktionen. Die Simulation wird mit dem In-House-Code *ElPaSo* durchgeführt.

Für qualitative Vergleiche der folgenden Simulationsexperimente wird die Platte zunächst mit einem über alle Frequenzen konstanten Druck beaufschlagt. Dieses entspricht einem senkrechten Schalleinfall. Die Amplitude des Drucks beträgt $P = 1 \text{ N/m}^2$, was gleichbedeutend ist mit einem Schalldruckpegel von 94 dB. Die Bestimmung des von der Platte in den akustischen Halbraum abgestrahlten Schalls erfolgt in Anlehnung an die Norm DIN EN ISO 3744 [43] auf einer Halbkugelmessfläche, die im Halbraum über der Platte zentriert ist. Der Radius dieser Halbkugel wird zu $r = 0,5 \text{ m}$ angesetzt. An 19 Positionen auf der Halbkugelfläche werden die Schalldrücke mittels Innenpunktauswertung der Randelementmethode bestimmt. Die Mittelung dieser Schalldrücke stellt das als Schalldruckpegel in Dezibel ausgewiesene Ergebnis dar. Abbildung 6.5 zeigt neben dem ermittelten Schalldruckpegel auch die Plattengeschwindigkeit. Des Weiteren wird die Platte durch schrägen Schalleinfall (gleiche Druckamplitude $P = 1 \text{ N/m}^2$, Einfallswinkel von 45°) belastet.

Deutlich zu erkennen sind bei senkrechtem Schalleinfall die Eigenfrequenzen der Platte bei rund 57 Hz, 177 Hz, 392 Hz und 418 Hz, die den Schwingungsmoden (1,1), (3,1), (1,3) und (5,1) zugeordnet sind. Die erste Zahl bezeichnet dabei die Anzahl der Halbwellen in Längsrichtung der Platte, die zweite die der Anzahl in Breitenrichtung. Bei schrägem Schalleinfall werden auch die Moden mit gerader Zahl angeregt. Tabelle 6.3 zeigt die zu den jeweiligen Schwingungsmoden zugehörigen Frequenzen im betrachteten Frequenzbereich von 0 bis 500 Hz.

Die von der Platte abgestrahlte Schallleistung P_W wird üblicherweise als Schallleistungspegel in Dezibel dargestellt.

$$L_W [\text{dB}] = 10 \log \frac{P_W}{P_0} \quad \text{mit} \quad P_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W} \quad (6.1)$$

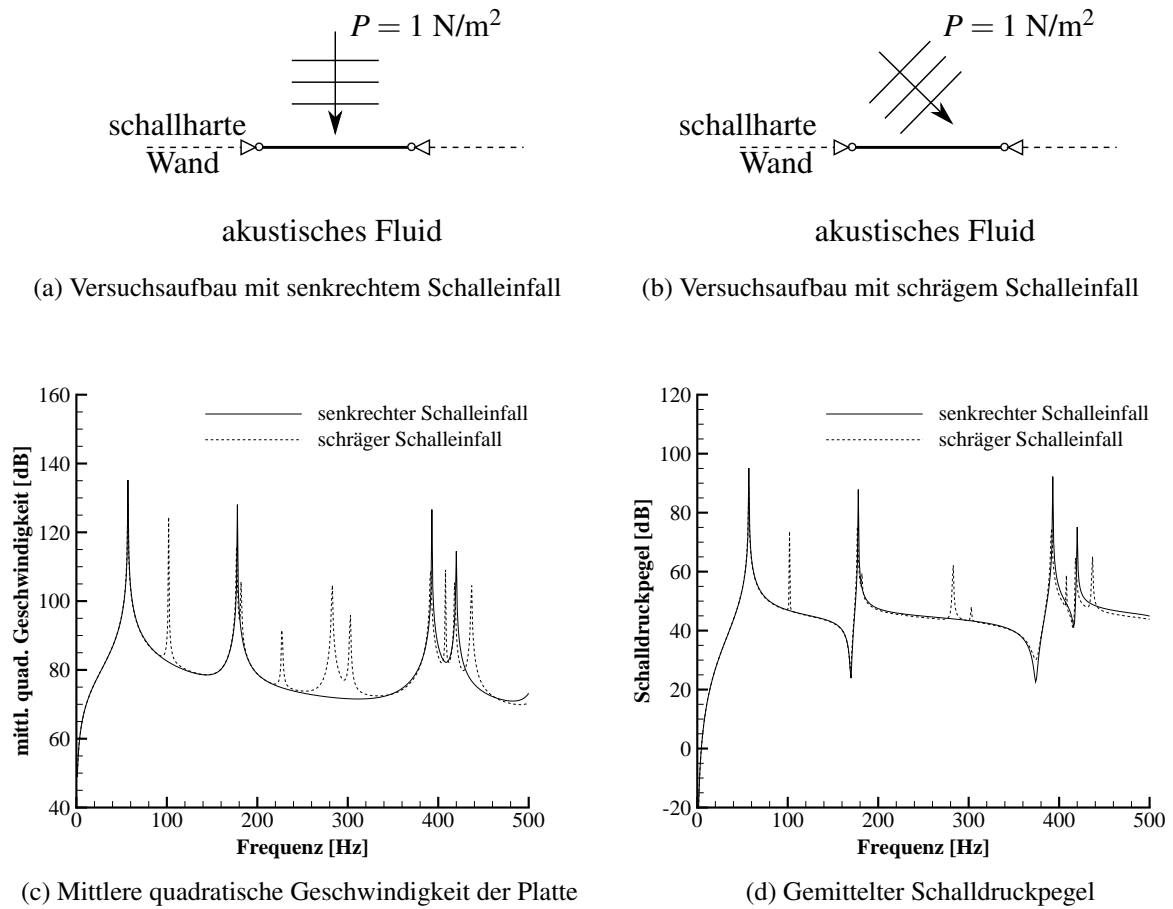


Abbildung 6.5: Versuchsaufbau und Ergebnisse bei Anregung der Platte durch Schalleinfall ebener Wellen

(m, n)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 1$	56,9	182,5	391,7
$m = 2$	102,1	227,7	436,9
$m = 3$	177,4	303,0	
$m = 4$	282,9	408,4	
$m = 5$	418,5		

Tabelle 6.3: Den Eigenmoden zugeordnete Frequenzen (in [Hz]) der betrachteten Platte unterhalb von 500 Hz

Der Leistungspegel L_W lässt sich aus dem über die Messfläche gemittelten Schalldruckpegel L_p bestimmen (siehe beispielsweise [38]). Die beiden Größen als Pegel entsprechen einander, wenn die Bezugsfläche 1 m^2 beträgt.

$$L_W [\text{dB}] = L_p + 10 \log \frac{S}{S_0} \quad \text{mit} \quad S_0 = 1 \text{ m}^2 \quad (6.2)$$

S bezeichnet die Fläche, über die die Ermittlung des Schalldruckpegels L_p erfolgt. Die Schallleistung stellt das Skalarprodukt der vektoriellen Schallintensität \mathbf{I} mit dem Normalenvektor \mathbf{n} integriert über die umgebende Fläche dar (siehe [42, 59]).

$$\begin{aligned} P_W &= \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{mit} \quad \mathbf{I} = \frac{1}{2} \Re(p \mathbf{v}^*) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[\int_S p \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} dS \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Konjugiert komplexe Werte sind durch $*$ gekennzeichnet. Wird zur Schallleistungsberechnung als Fläche die Platte herangezogen mit den entsprechenden Druck- und Schallschnellewerten an ihrer Oberfläche, ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit der aus den Schalldruckpegeln ermittelten Leistung. Abbildung 6.6 zeigt den Vergleich der Leistungspegel für die durch schrägen Schalleinfall angeregte Platte.

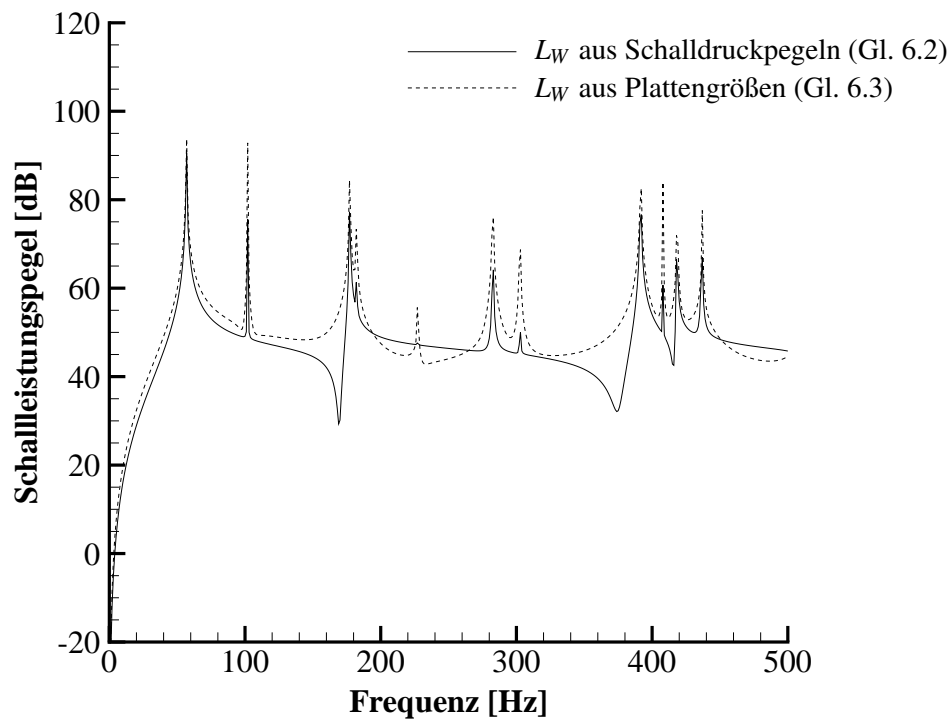


Abbildung 6.6: Vergleich der ermittelten Schallleistungspegel L_W für die durch schrägen Schalleinfall angeregte Platte

6.2.1 Überströmte Platte ohne poroelastisches Material

Im Folgenden wird die Platte aus dem vorangegangenen Abschnitt durch eine turbulente Strömung belastet. Abbildung 6.7(a) zeigt den Versuchsaufbau. Als Eingangsdaten werden die Er-

gebnisse der in Abschnitt 6.1 beschriebenen Strömungssimulation verwendet. Die Lage der Platte relativ zu der Geometrie der Strömungssimulation zeigt Abbildung 6.7(b).

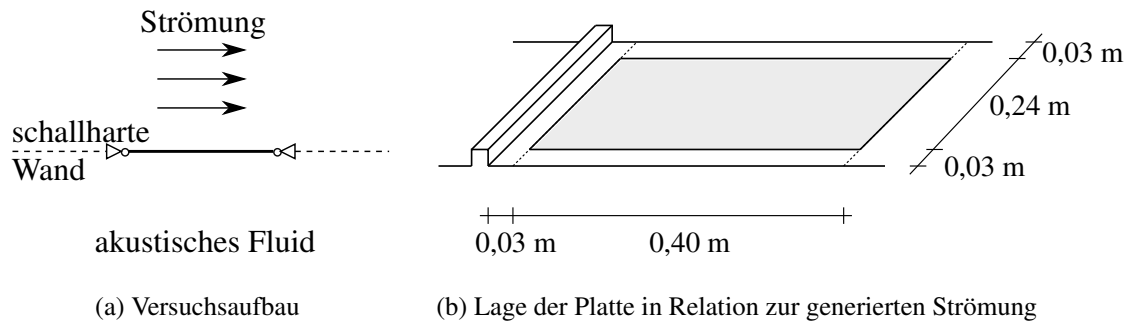


Abbildung 6.7: Überströmung der Platte

Die Überströmung erfolgt mit zwei Geschwindigkeiten: $v = 20 \text{ m/s}$ und $v = 50 \text{ m/s}$. Die sich je Frequenz ergebende mittlere Plattengeschwindigkeit und die gemittelten Schalldruckpegel sind in den Abbildungen 6.8 und 6.9 zu sehen.

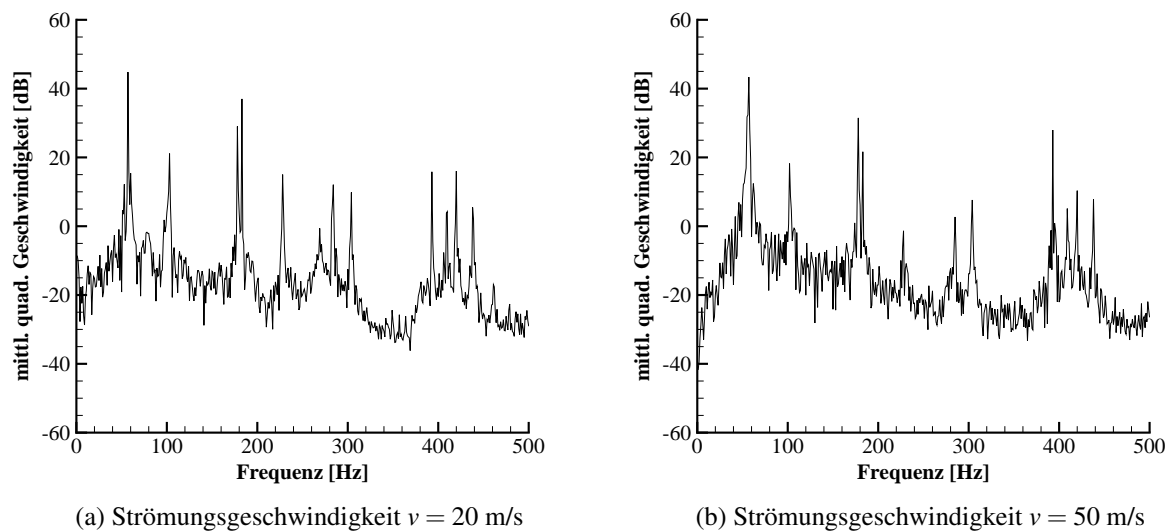


Abbildung 6.8: Mittlere quadratische Plattengeschwindigkeit aus der Anregung durch Strömung

In dem fluktuierenden Verlauf – hervorgerufen durch unterschiedlich große Belastungen je Frequenz und je Knoten – lassen sich deutlich die vorher identifizierten Eigenmoden der Platte ausmachen. Die Schwingungen eines Bauteils in seinen Eigenfrequenzen produzieren die maßgeblichen Beiträge für die resultierende Schallabstrahlung. Auf diesem Prinzip basieren die einleitend vorgestellten modalen Ansätze (siehe Kapitel 1.1).

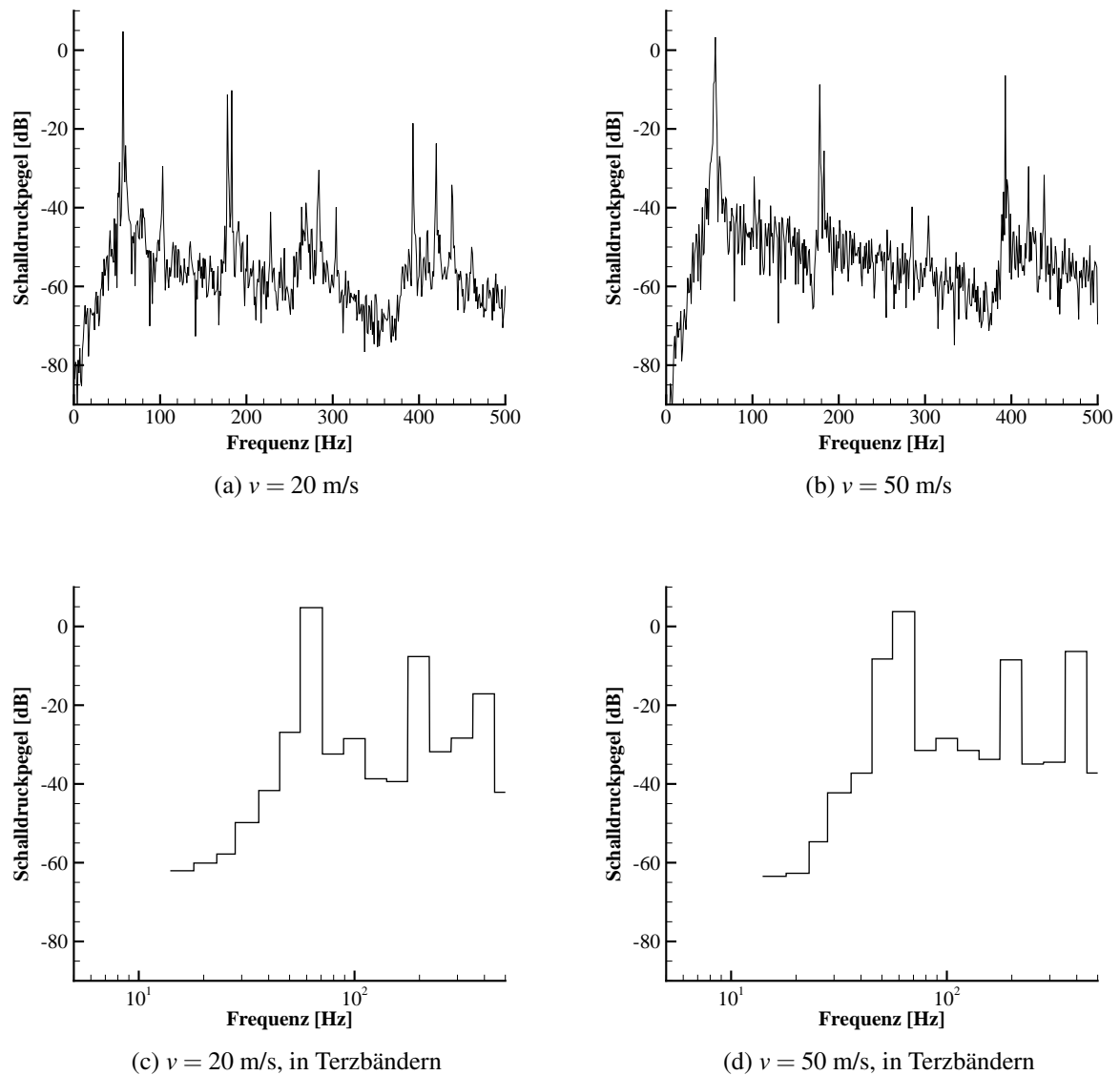


Abbildung 6.9: Schalldruckpegel aus strömungsinduzierter Schallabstrahlung bei unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten v

Über alle betrachteten Frequenzen summiert ergibt sich ein Gesamtschallpegel von 5,0 dB bei Zugrundelegung der Strömungsdaten für $v = 20$ m/s beziehungsweise von 4,6 dB bei $v = 50$ m/s. Der geringere Schalldruckpegel bei der höheren Geschwindigkeit erscheint fraglich, da der Druck proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist ($p \sim v^2$) und ein Anstieg der Druckschwankungen und damit des Schalldruckpegels der Erwartung entsprochen hätte. Im hier vorliegenden Fall erscheint die Lage der Platte bezüglich des generierten Wirbels für diesen Effekt verantwortlich, so dass letztendlich die Anregung der Platte trotz höherer Strömungsge-

schwindigkeit geringer ausfällt.

Die Schalldruckpegel von 5,0 dB und 4,6 dB liegen nur geringfügig über der Hörschwelle, so dass die strömungsinduzierte Schallabstrahlung im gegebenen Fall nur mittels Messgeräten nachweisbar sein wird. Im Weiteren werden diese Eingangsdaten trotzdem verwendet, um die Wirkung einer auf das überströmte Bauteil aufgetragenen poroelastischen Schicht zu demonstrieren und die Anwendbarkeit der in Kapitel 4.3 vorgestellten Kopplung von Strömung und poroelastischem Material aufzuzeigen.

6.2.2 Überströmte Platte mit poroelastischer Schicht

Zur Minderung der strömungsinduzierten Schallabstrahlung wird die Aufbringung einer poroelastischen Schicht auf das überströmte Bauteil diskutiert. Eine solche Schicht wird üblicherweise auch als poröser oder poroelastischer Liner bezeichnet.

Um die Wirksamkeit einer poroelastischen Schicht zu untersuchen, wird der Versuchsaufbau aus dem vorigen Abschnitt so modifiziert, dass auf der Strömungsseite der Platte eine Schicht poroelastischen Materials aufgebracht wird. Abbildung 6.10 zeigt den Versuchsaufbau und die Position des poroelastischen Materials in Bezug zur Geometrie der Strömungsgenerierung.

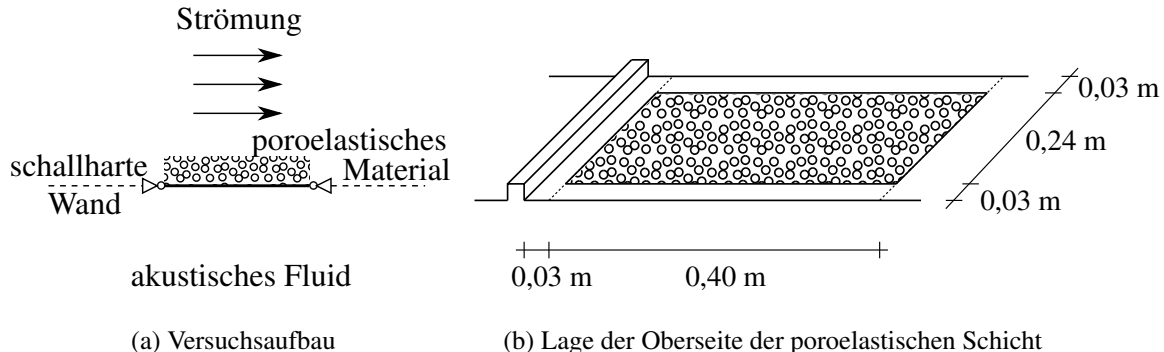


Abbildung 6.10: Versuchsaufbau mit poroelastischer Schicht

Zunächst wird die Dicke der poroelastischen Schicht zu $h_p = 0,01$ m gesetzt. Als poroelastisches Material kommt der in Tabelle 5.1(b) spezifizierte Schaum zur Anwendung. In Abbildung 6.11 sind die Ergebnisse für die Überströmung mit einer Geschwindigkeit von $v = 20$ m/s für die gemittelte Plattengeschwindigkeit und die Schallabstrahlung dargestellt. Zum Vergleich sind ebenfalls die Ergebnisse aus der Überströmung ohne poroelastische Schicht gegeben.

Im Bereich der Eigenfrequenzen ist eine deutliche Senkung der Plattengeschwindigkeit und damit auch des abgestrahlten Schallpegels zu erkennen. Mit ansteigenden Frequenzen ist eine generelle Absenkung der Plattenschwingungen und der Schallabstrahlung zu verzeichnen. Der über alle Frequenzen summierte Schalldruckpegel beträgt -26,8 dB. Der negative Wert bezeichnet, dass der Schalldruckpegel unterhalb der Hörschwelle liegt. Im Vergleich zum Gesamtschalldruckpegel ohne Schicht aus poroelastischem Schaum bedeutet dies eine Pegelsenkung

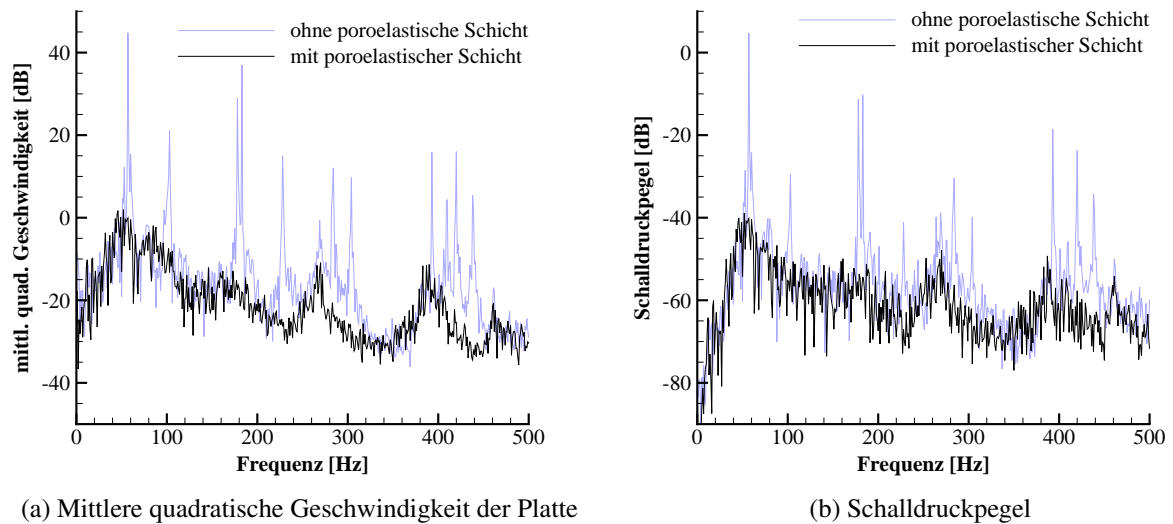


Abbildung 6.11: Strömungsinduzierte Plattenschwingung und Schallabstrahlung mit und ohne poroelastische Schicht

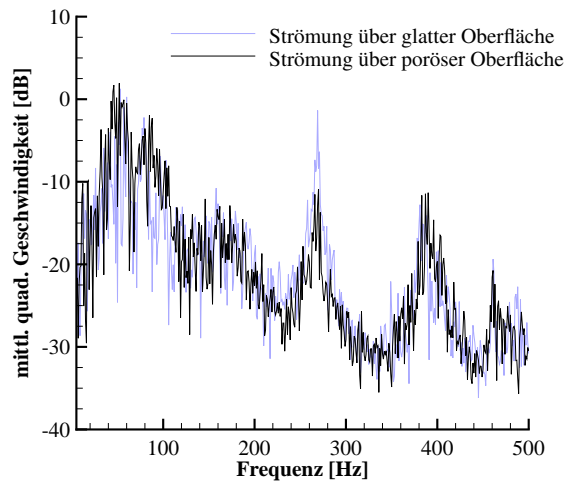
um 31,8 dB, die sich hauptsächlich durch die dämpfende Wirkung der poroelastischen Schicht im Bereich der Eigenfrequenzen ergibt.

Im Folgenden wird gegenübergestellt, wie die Wahl der Strömungsdaten das Schwingungsverhalten beeinflusst. Aus der Simulation einer Strömung über einer glatten Oberfläche resultieren für die Kopplungsfläche lediglich Druckwerte ($p^c \neq 0$), die Geschwindigkeit beträgt Null ($v^c = 0$). Eine Strömung über einer porösen Oberfläche liefert für das Interface sowohl Druckwerte als auch Geschwindigkeiten ($p^c \neq 0$, $v^c \neq 0$). Abbildung 6.12 vergleicht die mittleren Plattengeschwindigkeiten und die Schallabstrahlung in Terzbändern, wenn die Kopplung des poroelastischen Materials mit einer Strömung über einer glatten Oberfläche beziehungsweise einer Strömung über einer porösen Oberfläche erfolgt.

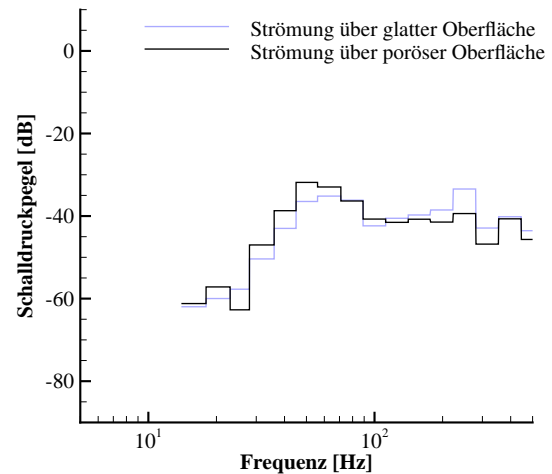
Es stellen sich generell ähnliche Verläufe ein, die die Eigenfrequenzen der Platte aufzeigen. Die Abweichungen im Detail (beispielsweise um die Frequenz von 270 Hz) können jedoch deutlich ausfallen, so dass je nach betrachteter Kopplung (Strömung – elastische Struktur oder Strömung – poroelastisches Material) die entsprechend generierten Strömungsdaten anzuwenden sind. Für die weiteren Untersuchungen werden bei einer Kopplung mit poroelastischem Material folglich die Strömungsdaten zur Anwendung kommen, die aus der zugehörigen Simulation einer Strömung über einer porösen Oberfläche stammen (siehe Kapitel 6.1).

Im nächsten Betrachtungsschritt wird die Dicke der poroelastischen Schicht erhöht (in diesem Fall verdoppelt auf $h_p = 0,02$ m). Es kommt zu keinen weiteren signifikanten Schallpegelreduzierungen. Der Gesamtschallpegel reduziert sich um 1,5 dB auf -28,3 dB. Abbildung 6.13 stellt die Ergebnisse für die Überströmung einer mit einer 1 cm dicken und einer 2 cm dicken poroelastischen Schicht belegten Platte gegenüber.

Aus diesem Ergebnis ist zu schlussfolgern, dass bei der Betrachtung der strömungsindu-

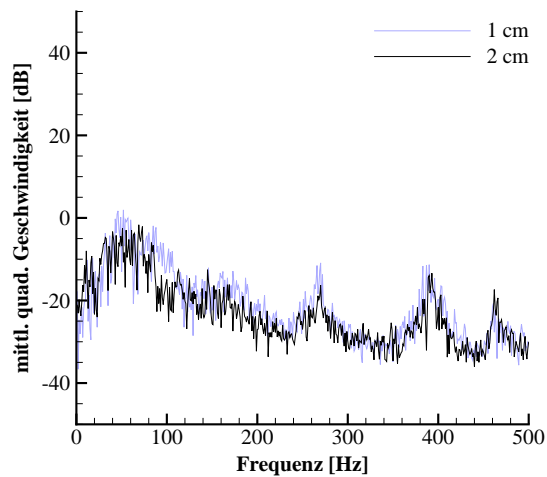


(a) mittlere quadratische Geschwindigkeit der Platte

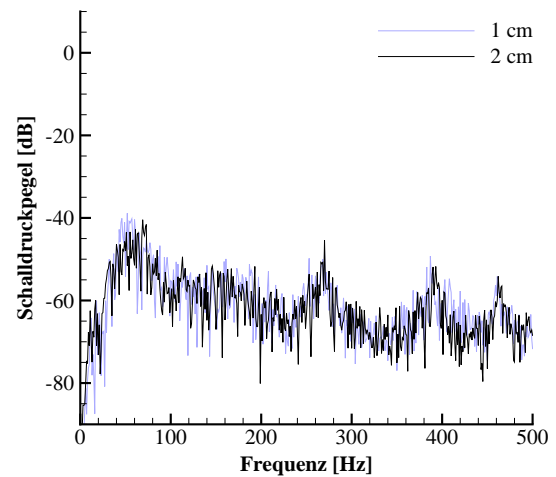


(b) Schalldruckpegel, in Terzbändern

Abbildung 6.12: Vergleich der Ergebnisse bei Verwendung unterschiedlicher Strömungen



(a) Mittlere quadratische Geschwindigkeit der Platte



(b) Schalldruckpegel

Abbildung 6.13: Strömungsinduzierte Plattenschwingung und Schallabstrahlung bei unterschiedlicher Dicke der poroelastischen Schicht ($h_p = 1$ cm, $h_p = 2$ cm)

zierten Schallabstrahlung eines Bauteils die Hauptwirkung einer aufgetragenen poroelastischen Schicht in der Beeinflussung der Eigenmoden liegt. Findet eine wirkungsvolle Dämpfung der Eigenmoden statt, bringt eine weitere Erhöhung der Schichtdicke keine wesentliche Pegelmin- derung. Daher ist davon auszugehen, dass es abhängig vom verwendeten poroelastischen Ma- terial eine Mindestdicke des Liners gibt, die bestimmend für die Dämpfung der Eigenmoden ist.

Tabelle 6.4 zeigt die resultierenden abgestrahlten Schallpegel für die untersuchten Kombi- nationen aus Strömungsgeschwindigkeit, Material und Schichtdicke auf. Angegeben ist jeweils auch die erzielte Schallminderung bezogen auf den Fall ohne poroelastische Schicht.

	Dicke der poroelastischen Schicht und Strömungsgeschwindigkeit			
	$h_p = 0,01 \text{ m}$		$h_p = 0,02 \text{ m}$	
	$v = 20 \text{ m/s}$	$v = 50 \text{ m/s}$	$v = 20 \text{ m/s}$	$v = 50 \text{ m/s}$
Schaum (Tab. 5.1(b))	-26,8 (31,8)	-21,6 (26,2)	-28,3 (33,3)	-22,2 (26,8)
Mineralwolle (Tab. 5.2)	-32,8 (37,8)	-27,0 (31,6)	-35,1 (40,1)	-30,4 (35,0)
Filz (Tab. 5.2)	-31,2 (36,2)	-26,1 (30,7)	-32,6 (37,6)	-27,6 (32,2)

Tabelle 6.4: Schalldruckpegel in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit v , Dicke der auf- gebrachten poroelastischen Schicht h_p und Materialien; in Klammern Schallpegel- reduzierung zum Vergleichsfall ohne poroelastische Schicht

6.3 Strömungsinduzierter Körperschall

In diesem Beispiel wird der durch eine Strömung induzierte Körperschall in einer Konstruktion betrachtet und die Auswirkungen bei der Verwendung eines poroelastischen Liners dargestellt. Das Beispiel lehnt sich an den Aufbau einer Tragfläche an, wobei die hier gewählte Geome- trie eine starke Vereinfachung darstellt. Die untersuchte Konstruktion besteht aus zwei Platten, die die Flügelhaut auf der Tragflächenober- und -unterseite repräsentieren, die durch zwei Rip- pen und einen Holm miteinander verbunden sind. Abbildung 6.14 zeigt die Struktur und ihre Abmessungen.

Die Konstruktion besteht aus Aluminium mit einer Dichte von $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$, einem Elastizitätsmodul von $E = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ und der Querdehnzahl $\nu = 0,33$. Die Dicken der Tragflächenober- und -unterseite sowie der Rippen sind mit $d = 0,0005 \text{ m}$ angesetzt, die Dicke des Holms beträgt $d_H = 0,001 \text{ m}$.

Für das Simulationsexperiment wird eine gelenkige Lagerung der oberen und unteren Platte an ihren kurzen Seiten vorgesehen. Die Enden der Rippen sind in diesen Ebenen ebenfalls

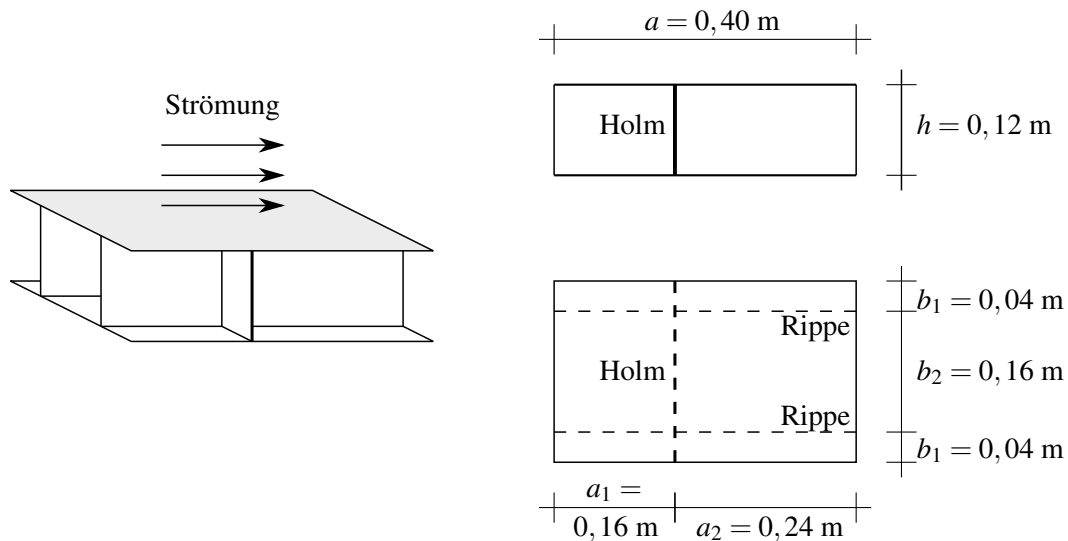


Abbildung 6.14: Aufbau der einer Tragfläche nachempfundenen Beispielkonstruktion, rechts in Ansicht und Aufsicht

gelenkig gelagert. Die Diskretisierung erfolgt durch Mindlin-Plattenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen.

Wie im vorangegangenen Beispiel (Kapitel 6.2) werden zunächst die relevanten Eigenfrequenzen der Struktur aufgezeigt, indem die obere Platte über alle Frequenzen gleichmäßig durch senkrechten Schalleinfall ebener Wellen mit einer Druckamplitude von $P = 1 \text{ N/m}^2$ beaufschlagt wird. Da der in die Struktur eingeleitete Körperschall und dessen Weiterleitung innerhalb der Struktur von Interesse sind, werden im Rahmen dieses Experiments zur Auswertung die freien Enden des Holms herangezogen, indem eine Mittelwertbildung über die Auslenkungen aller Knoten der freien Holmkanten erfolgt. Abbildung 6.15 zeigt als Ergebnis die mittlere Geschwindigkeit der Knoten in Dezibel, mit der Referenzgeschwindigkeit von $v_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$.

An den Peaks im Verlauf sind deutlich die jeweiligen Eigenfrequenzen der Tragflächenkonstruktion zu erkennen. Gegenüber der einzelnen Platte aus dem vorherigen Beispiel zur Schallabstrahlung (Abschnitt 6.2) besitzt die hier modellierte Struktur eine ungleich höhere Modendichte. Dieses ist bedingt durch die Anzahl unterschiedlich großer Schalenkonstruktionen, aus denen sich die Struktur zusammensetzt.

Wird die obere Platte schrägem Schalleinfall ebener Wellen ausgesetzt (Einfallswinkel 45° zur Senkrechten sowie zu den Kanten der oberen Platte, $P = 1 \text{ N/m}^2$) zeigen sich weitere symmetrische Eigenmoden, die durch den senkrechten Schalleinfall nicht angeregt werden.

6.3.1 Überströmte Struktur ohne poroelastische Schicht

Im Weiteren erfolgt ein Körperschalleintrag in die Struktur mittels einer Strömung. Dazu wird auf die obere Platte der Konstruktion die in Kapitel 6.1 vorgestellte Strömung aufgegeben. Die

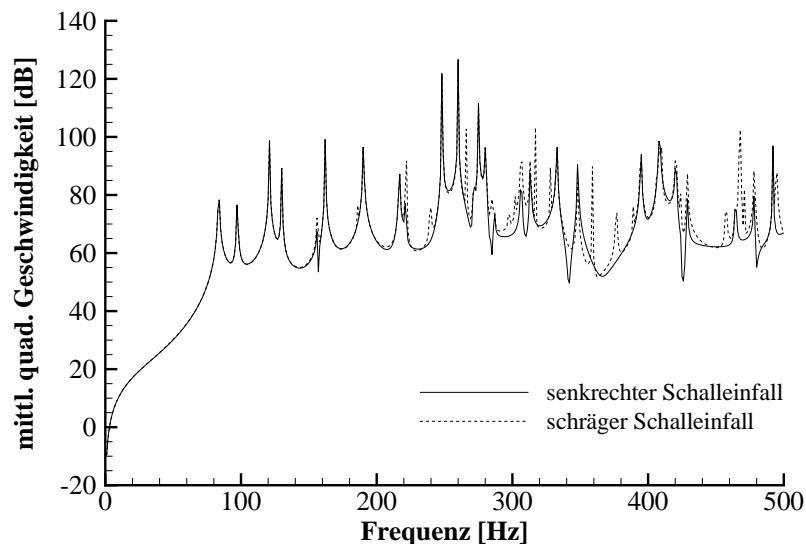


Abbildung 6.15: Mittlere quadratische Geschwindigkeit der Knoten an den freien Holmkanten bei Anregung der oberen Platte durch Schalleinfall ebener Wellen

Lage der oberen Platte im Vergleich zur Geometrie der Strömungsgenerierung ist wie im vorigen Beispiel (siehe Abbildung 6.7(b)). Die Randbedingung für die Lagerung sowie die Diskretisierung sind gegenüber dem vorigen Abschnitt unverändert.

Die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Knoten der freien Holmenden zeigt Abbildung 6.16. Angegeben sind die Ergebnisse für Überströmungen mit den Geschwindigkeiten $v = 20 \text{ m/s}$ und $v = 50 \text{ m/s}$.

Gegenüber dem Ergebnis der ersten Simulation, das die Eigenfrequenzen zeigt, die beim Aufbringen eines Drucks auf die obere Platte angeregt werden, zeigen sich hier deutlich fluktuierende Verläufe, die sich aufgrund der ungleichmäßigen Belastung aus der Überströmung ergeben. Klar zu erkennen sind jedoch weiterhin die angeregten Eigenfrequenzen des Systems, so dass davon ausgegangen werden kann, dass der sich in einer Struktur ausbreitende Körperschall durch die Beiträge an den Eigenfrequenzen dominiert wird.

Abbildung 6.17 zeigt eine Aufteilung der gemittelten Geschwindigkeiten nach ihren Richtungsanteilen. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Anteil in Strömungsrichtung dominiert, und die Beiträge quer zur Strömungsrichtung und senkrecht zur überströmten Plattenebene um eine bis zwei Größenordnungen kleiner sind und ihr Beitrag zur Gesamtgeschwindigkeit als vernachlässigbar angesehen werden kann. Da die nachgebildete Tragflügelkonstruktion in Strömungsrichtung gesehen sowohl an ihrer Vorder- als auch ihrer Rückseite unverschieblich gelagert sind, überrascht es, dass trotzdem die Verschiebungen in Strömungsrichtung bestimmend sind. Es ist zu schlussfolgern, dass bei der hier aufgebrachten Strömung die Druckvariation in Strömungsrichtung erheblich größer ist als jene quer zur Strömung.

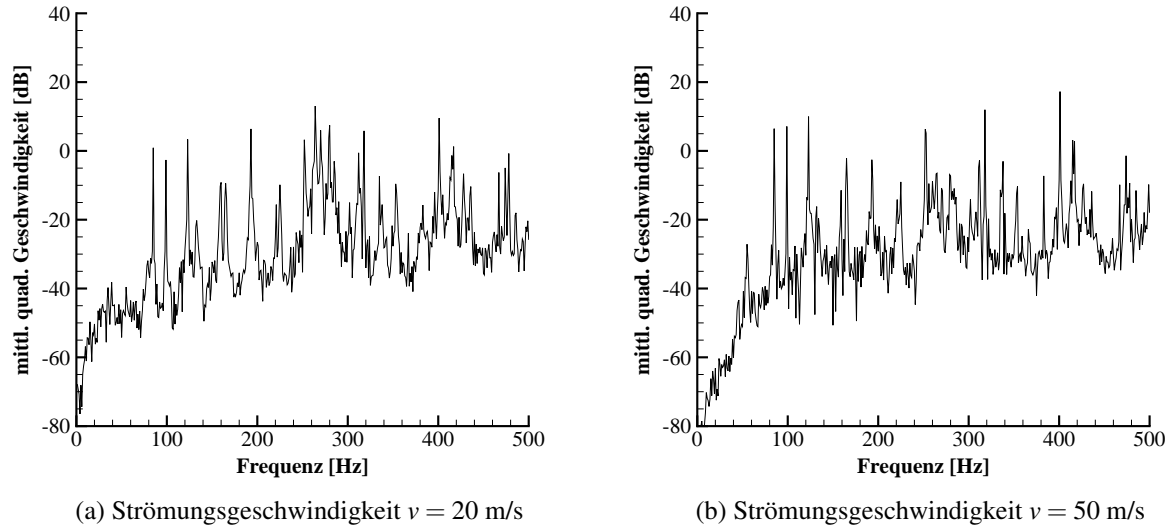


Abbildung 6.16: Mittlere quadratische Geschwindigkeit der Knoten an den freien Enden des Holmes

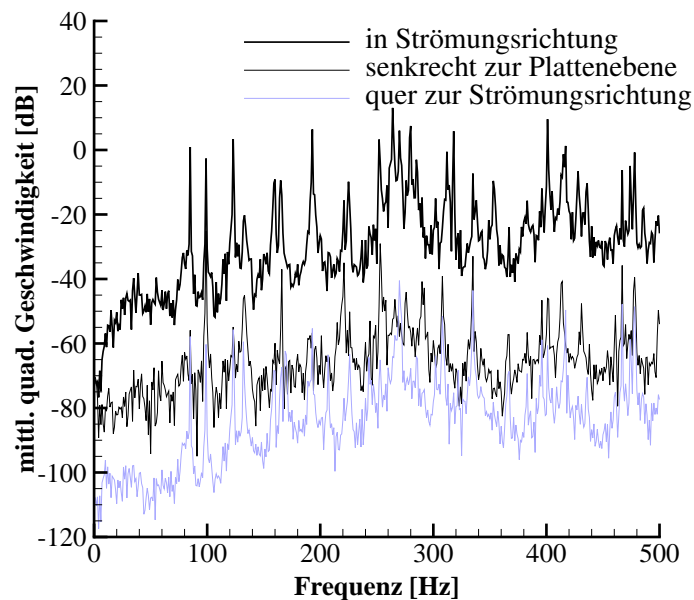


Abbildung 6.17: Anteilige Geschwindigkeitsverteilung der Knoten an den freien Holmkanten

6.3.2 Überströmte Struktur mit poroelastischer Schicht

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie durch das Aufbringen eines poroelastischen Liners der Körperschalleintrag in eine Konstruktion beeinflusst werden kann.

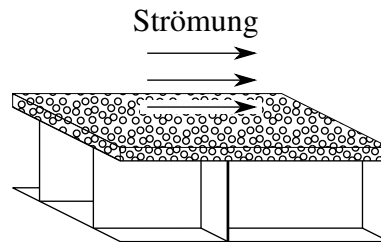


Abbildung 6.18: Beispielkonstruktion mit aufgebrachtter poroelastischer Schicht auf der oberen Platte

Die überströmte obere Platte der einer Tragfläche nachempfundenen Konstruktion wird dazu mit einer poroelastischen Schicht versehen (siehe Abbildung 6.18). Das gewählte poroelastische Material ist der in Tabelle 5.1(b) spezifizierte Schaum. Die Dicke der Schicht beträgt $h_p = 0,01$ m. Die Überströmung erfolgt mit den in Kapitel 6.1 beschriebenen Strömungsdaten. Die Lage der Oberseite der aufgetragenen poroelastischen Schicht ist wie in Abbildung 6.10(b) angegeben. Randbedingungen und Diskretisierung entsprechen den in Abschnitt 6.3 dargestellten.

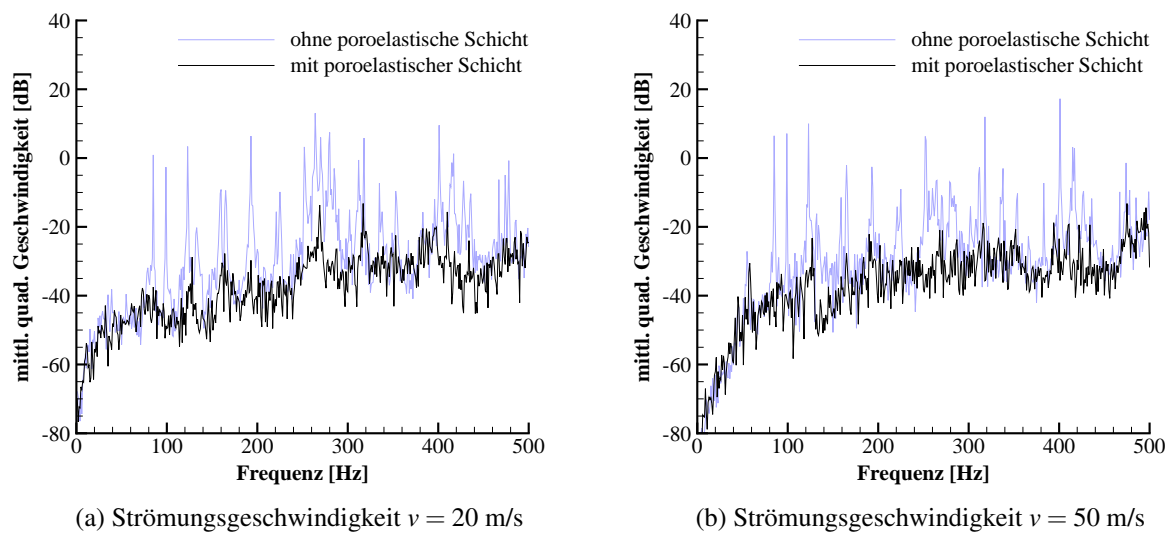


Abbildung 6.19: Mittlere quadratische Geschwindigkeit der Knoten an den freien Enden des Holmes

Die Abbildung 6.19 zeigt die gemittelten Knotengeschwindigkeiten an den freien Enden des Holmes für die Überströmung der Struktur bei den Strömungsgeschwindigkeiten $v = 20$ m/s und $v = 50$ m/s. Zu erkennen sind signifikante Absenkungen der Geschwindigkeiten im Bereich der Eigenfrequenzen sowie eine leichte Reduzierung über alle Frequenzen.

Ein Vergleich der Geschwindigkeitsanteile in Strömungsrichtung, quer zur Strömungs-

richtung und senkrecht zur überströmten Fläche zeigt weiterhin, dass die Geschwindigkeiten in Strömungsrichtung dominieren. Das Verhältnis zu den Anteilen senkrecht zur überströmten Platte und quer zur Strömungsrichtung bleibt im Vergleich zu dem Simulationsexperiment ohne poroelastische Schicht (siehe Abbildung 6.17) gleich.

Werden statt des gewählten Schaums andere poroelastische Materialien eingesetzt, ergeben sich ähnliche Ergebnisse. Abbildung 6.20 zeigt die Ergebnisse, wenn statt des Schaums eine Mineralwolle beziehungsweise ein Filz als poroelastische Schicht zum Einsatz kommen, für die Strömungsgeschwindigkeit von $v = 20$ m/s. Auch in diesem Fall ist eine deutliche Absenkung der Peaks an den Eigenfrequenzen wahrzunehmen, ebenso wie eine geringfügige Geschwindigkeitsreduzierung über den gesamten Frequenzbereich.

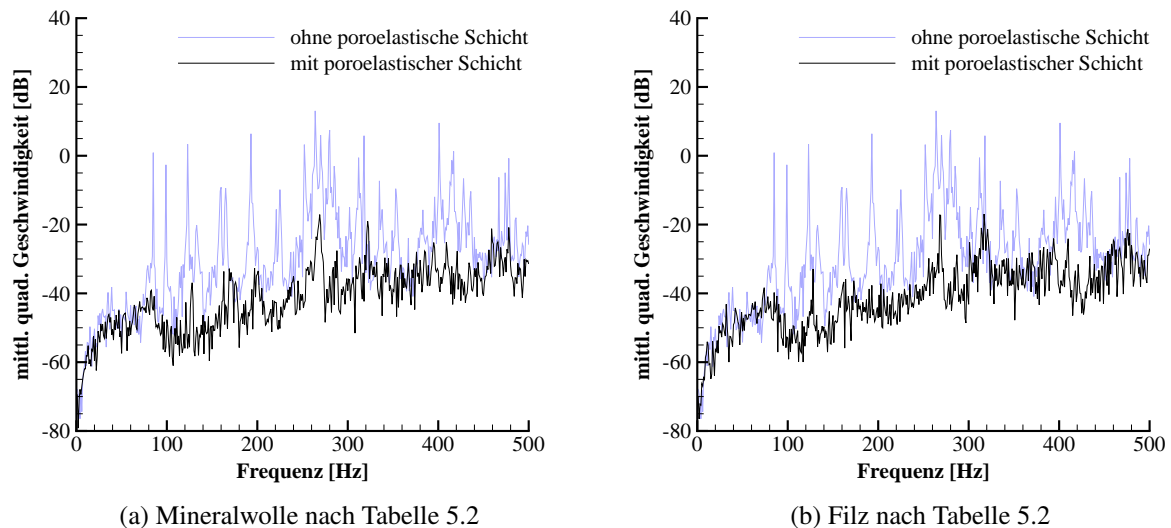


Abbildung 6.20: Mittlere quadratische Geschwindigkeit der Knoten an den freien Enden des Holmes bei Verwendung verschiedener poroelastischer Liner

In einem letzten Schritt wird untersucht, wie sich eine Erhöhung der Schichtdicke auf den Körperschalleintrag in die Struktur auswirkt. Die Dicke h_p des poroelastischen Liners wird dazu von 0,01 m auf 0,02 m verdoppelt. Abbildung 6.21 stellt die Ergebnisse der beiden Schichtdicken bei Verwendung des Schaums nach Tabelle 5.1(b) für die Strömungsgeschwindigkeiten $v = 20$ m/s und $v = 50$ m/s gegenüber.

Deutliche Geschwindigkeitsabsenkungen sind bei einer Erhöhung der Dicke der poroelastischen Schicht von 0,01 m auf 0,02 m nicht erkennbar. Es kann eine minimale Geschwindigkeitsabsenkung über den gesamten Frequenzbereich festgestellt werden. Die Wirkung der zusätzlichen Schichtdicke von 0,01 m liegt somit im vernachlässigbaren Bereich.

Wie schon bei den Untersuchungen zur strömungsinduzierten Schallabstrahlung (Kapitel 6.2) liegt auch hier die Hauptwirkung der poroelastischen Schicht in der Beeinflussung der Auslenkungen an den Eigenfrequenzen der betrachteten Konstruktion. Eine Erhöhung der Schichtdicke des poroelastischen Liners über eine bestimmte Dicke hinaus hat nur noch geringe Aus-

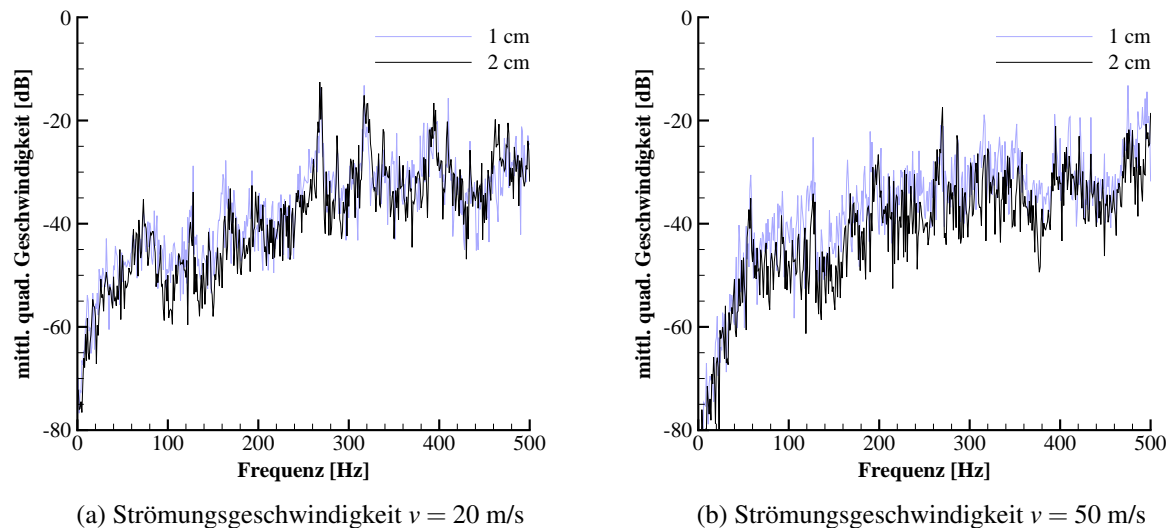


Abbildung 6.21: Mittlere quadratische Geschwindigkeit der Knoten an den freien Enden des Holmes bei unterschiedlicher Dicke der poroelastischen Schicht ($h_p = 1$ cm, $h_p = 2$ cm)

wirkungen auf den Körperschalleintrag. Auch hier stellt sich die Frage nach der Mindestdicke der poroelastischen Schicht, damit eine effektive Dämpfung der Eigenmoden der Konstruktion gewährleistet ist und so eine positive Beeinflussung des Körperschalls erzielt wird. Insbesondere bei teuren poroelastischen Materialien wird so eine wirtschaftliche Auslegung ermöglicht.

6.4 Nachbildung einer poroelastischen Hinterkante

Dieses Beispiel stellt eine mögliche Verwendung von poroelastischen Materialien zur Schallreduzierung vor. Die aeroakustische Wirksamkeit von porös gestalteten Hinterkanten ist bekannt [45, 73], so dass auch die Ausbildung von Hinterkanten aus poroelastischen Materialien diskutiert werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt wie eingangs erwähnt keine Betrachtung der Aeroakustik, vielmehr sollen in diesem Beispiel die Auswirkungen auf die Struktur untersucht werden.

Im Folgenden wird die Ausführung einer Hinterkante aus Aluminiumblechen verglichen mit zwei Konfigurationen, bei denen die Hinterkante aus poroelastischem Material besteht. Die Hinterkante wird durch eine einfache Geometrie nachgebildet.

6.4.1 Überströmte Hinterkante aus Aluminiumblechen

Die Generierung einer turbulenten Strömung über die Beispielhinterkante erfolgt wie in Kapitel 6.1 mittels des kommerziellen Programmpaketes *ANSYS CFX*. Dazu wird die Hinterkante in eine Kanalgeometrie eingebaut und beidseitig umströmt. In Strömungsrichtung vor dem Beginn

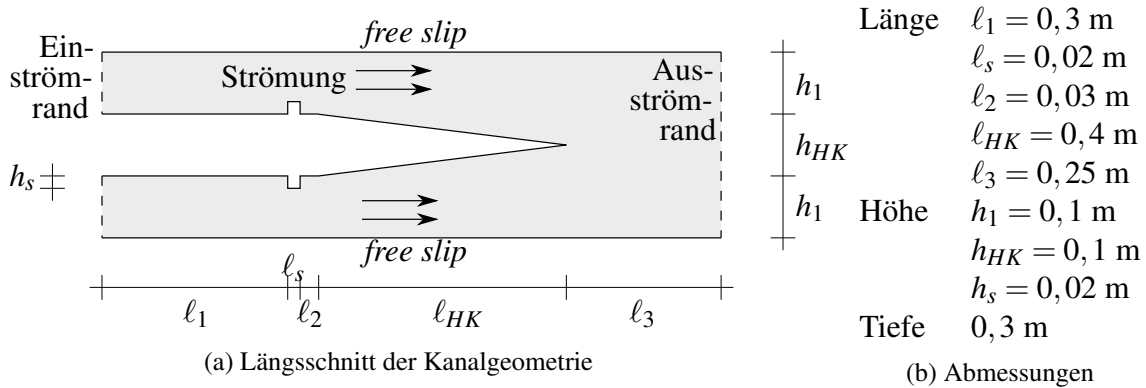


Abbildung 6.22: Geometrie zur Strömungssimulation für die Beispielhinterkante aus Aluminiumblechen

der Hinterkante sind erneut Stollerschwellen eingebaut, um ein instationäres Strömungsfeld zu erhalten. Die Luft als strömendes Fluid wird durch die in Abschnitt 6.1 genannten Parameter spezifiziert. Die Geschwindigkeit der Strömung über den gesamten Einströmrand beträgt konstant 50 m/s. Abbildung 6.22 zeigt den Aufbau und die zugehörigen Abmessungen. Die gesamte Länge des simulierten Kanalquerschnitts beträgt wie zuvor $\ell = 1$ m, die Höhe h sowie und die Tiefe jeweils 0,3 m. Die Diskretisierung des Strömungsgebiets umfasst 715200 Hexaederelemente.

Die Struktur der nachgebildeten Hinterkante zeigt Abbildung 6.23. Die Konstruktion umfasst die ober- und unterseitige Flügelhaut sowie zwei Rippen. Die gelenkige Lagerung erfolgt punktuell an den Stoßstellen von Flügelhaut und Rippen. Wie im vorigen Beispiel (Kapitel 6.3) besteht die Konstruktion aus Aluminium (Dichte $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$, Elastizitätsmodul $E = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, Querkontraktionszahl $\nu = 0,33$) mit einer konstanten Dicke $d = 0,001$ m für alle Bauteile. 1400 Mindlin-Plattenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisieren die Struktur. Die Struktursimulation erfolgt mit dem In-House-Code *ElPaSo*.

Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen der Konstruktion wird zunächst eine schräg angreifende Punktlast F (45° Neigung zu jeder Achse, $F = \sqrt{3} \text{ N}$) außermittig auf die obere geneigte Flügelhaut aufgebracht (Angriffspunkt P_F in Abbildung 6.23). Die Auswertung erfolgt anhand der Auslenkungen des Hinterkantenendes. Abbildung 6.24 zeigt in der Darstellung der mittleren quadratischen Geschwindigkeiten in Dezibel deutlich die Eigenfrequenzen des Systems auf. Zur besseren Übersichtlichkeit ist eine Aufteilung in die Raumrichtungen x , y und z gegeben. Wie im vorangehenden Beispiel existiert eine hohe Modendichte aufgrund der Zusammensetzung der Konstruktion aus mehreren Flächen unterschiedlicher Größe.

Zur Simulation der Überströmung der Beispielhinterkante werden die geneigten Flächen der Hinterkante durch die vorbeschrieben generierte Strömung belastet. Eine weitere Belastung der anderen Flächen erfolgt nicht.

Zur Auswertung werden die Punkte am Ende der Hinterkante herangezogen sowie die vier Stoßpunkte der Rippen mit der Flügelhaut, gekennzeichnet durch P_{Aw} in der Abbildung 6.23. Die maximalen Verschiebung am Ende der Hinterkante liegen im Bereich von $3,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$,

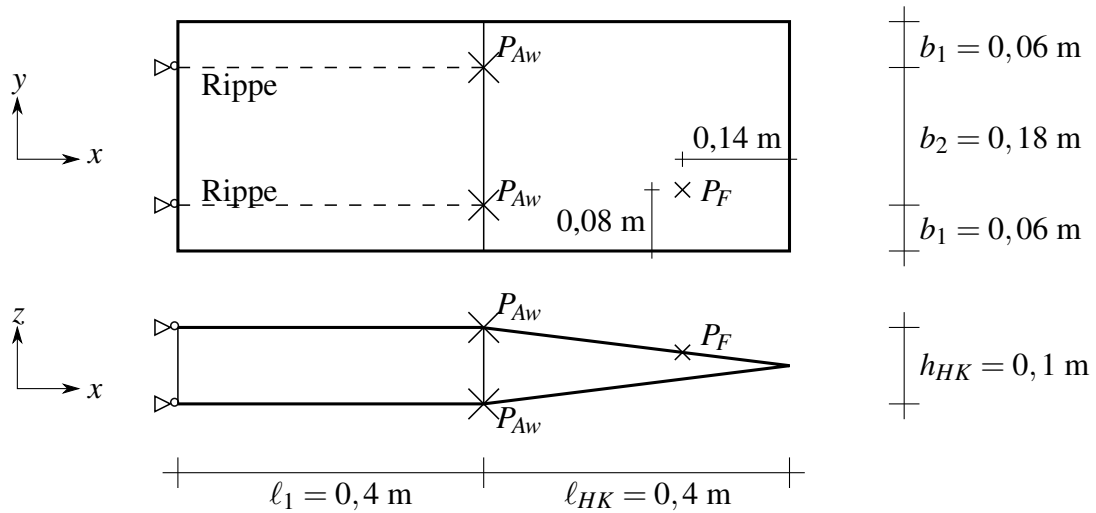


Abbildung 6.23: Geometrie zur Struktursimulation der Beispielhinterkante aus Aluminium mit Kennzeichnung der Auswertepunkte P_{Aw}

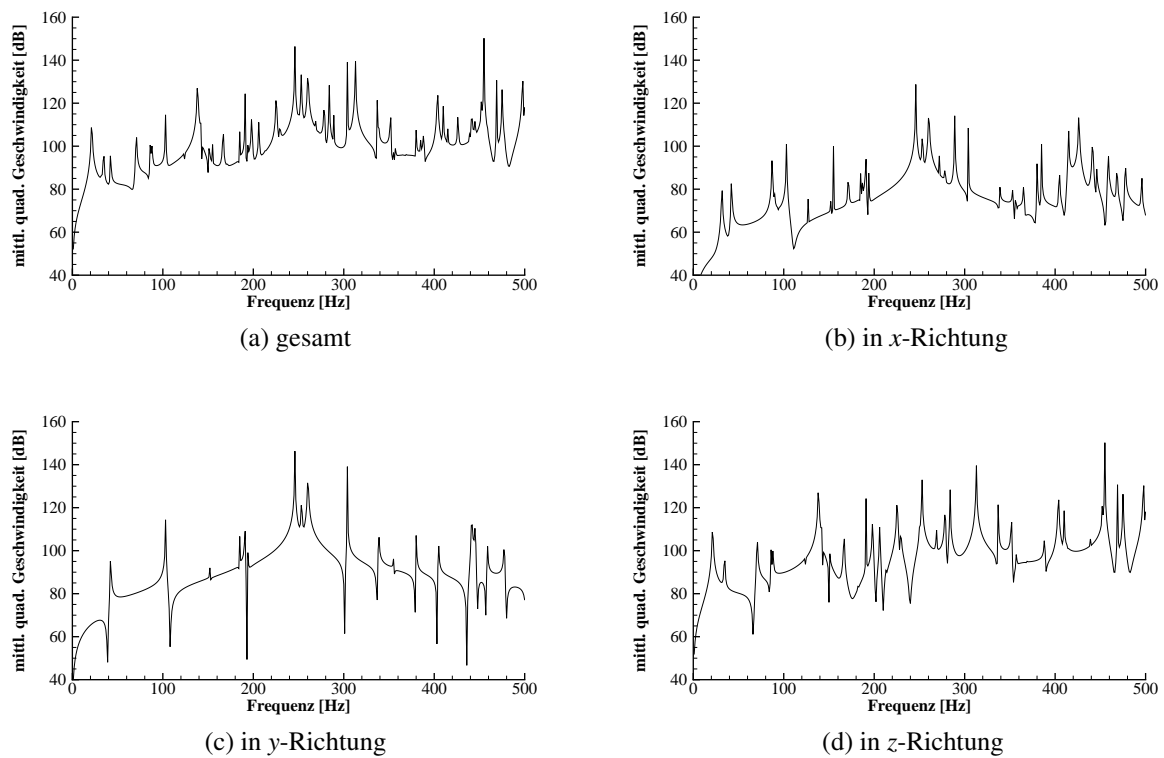


Abbildung 6.24: Mittlere quadratische Geschwindigkeiten am Ende der Hinterkante bei Anregung durch eine Punktlast

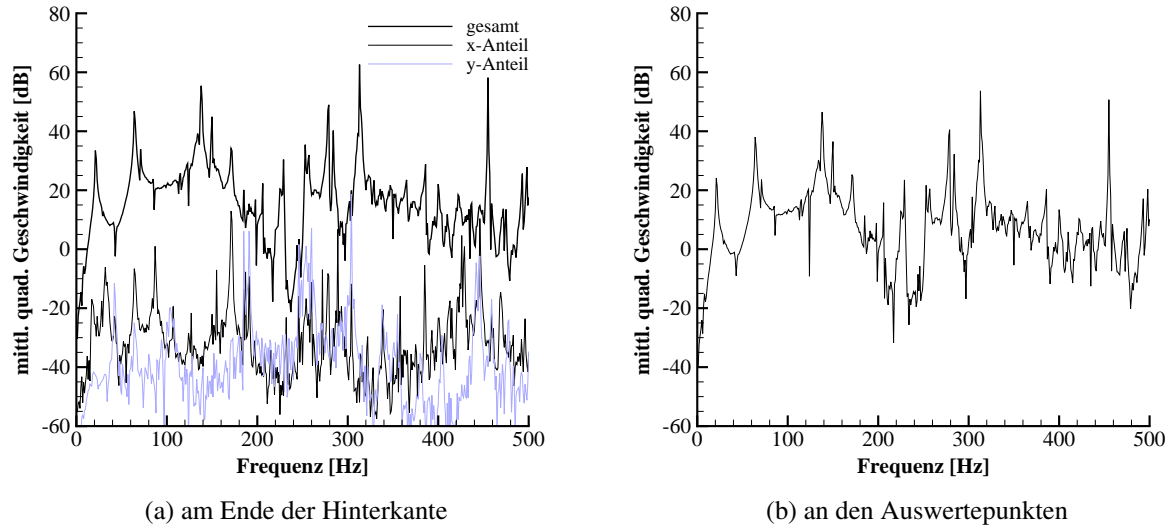


Abbildung 6.25: Mittlere quadratische Geschwindigkeiten der Hinterkantenkonstruktion aus Aluminiumblechen bei Anregung durch Überströmung

Abbildung 6.25(a) zeigt die mittleren quadratischen Geschwindigkeiten in Dezibel. Darstellt sind ebenfalls die Geschwindigkeitsanteile in x - und y -Richtung. Aus der Pegeldarstellung ist zu erkennen, dass die Auslenkungen in z -Richtung dominieren, wie dieses für eine überströmte Hinterkante erwartet werden kann. Deutlich zu erkennen ist ebenfalls, dass sich die Peaks an denjenigen Frequenzen zeigen, die den Eigenmoden in z -Richtung entsprechen (siehe Abbildung 6.24(d)).

Für die Auswertepunkte zeigt sich ein ähnlicher Ergebnisverlauf wie zuvor (siehe Abbildung 6.25(b)). Die Auslenkungen der Auswertepunkte betragen im Maximum $1,2 \cdot 10^{-8}$ m.

6.4.2 Überströmte Hinterkante aus poroelastischem Material

Für die weiteren Betrachtungen wird der Keil der Hinterkante aus poroelastischem Material ausgeführt. Zum Einsatz kommen zwei in der Literatur beschriebene Metallschäume: ein Aluminium-Schaum, dessen Materialparameter Dupont *et al.* [48] untersucht haben, und ein Nickel-Chrom-Schaum der Firma Recemat International [109], dessen poroelastische Materialparameter von Lautensack und Kabel [89] aus Simulationen bestimmt worden sind. Die im Folgenden verwendeten Größen zur Beschreibung der poroelastischen Schäume sind in Tabelle 6.5 aufgeführt.

Zunächst erfolgt die Simulation der Strömung. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 6.26 dargestellt, die Abmessungen entsprechen den Angaben des vorigen Abschnitts, die Geschwindigkeit am Einströmrand bleibt mit 50 m/s unverändert. Wie in Kapitel 6.1 ausgeführt, wird das durchströmte Material lediglich durch seine Porosität spezifiziert, so dass das Simulationsexperiment mit einer Porosität von $\phi = 64,5 \%$ und $\phi = 90,0 \%$ durchgeführt wird.

	Aluminium-Schaum (nach [48])	Nickel-Chrom-Schaum (nach [89, 109])
Strömungswiderstand	$\sigma = 19713 \text{ Ns/m}^4$	$\sigma = 5493 \text{ Ns/m}^4$
Porosität	$\phi = 0,645$	$\phi = 0,90$
Tortuosität	$\alpha_\infty = 2,25$	$\alpha_\infty = 1,11$
Viskose charakteristische Länge	$\Lambda = 101 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$\Lambda = 325 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Thermale charakteristische Länge	$\Lambda' = 352 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$\Lambda' = 371 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Dichte der Festkörperphase im poroelastischen Medium	$\rho_1 = 994 \text{ kg/m}^3$	$\rho_1 = 625 \text{ kg/m}^3$
E-Modul der Festkörperphase	$E = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	$E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
Querdehnzahl	$\nu = 0,33$	$\nu = 0,33$
Verlustfaktor	$\eta = 0,007$	$\eta = 0,007$

Tabelle 6.5: Parameter der zur Simulation verwendeten poroelastischen Metall-Schäume

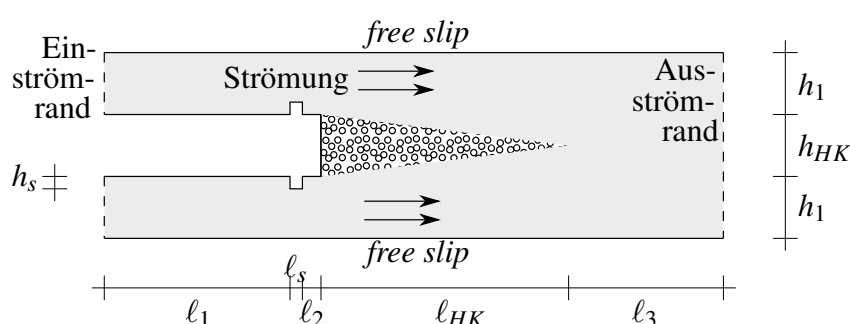


Abbildung 6.26: Geometrie zur Strömungssimulation für die Beispielhinterkante aus Metall-Schaum

In der Struktur der Hinterkante werden die geeigneten Aluminiumbleche durch einen Keil aus poroelastischem Material ersetzt. Eine dünne Aluminiumplatte schließt den Keil gegen den Rest der Tragfläche ab. Die Dicke dieser Aluminiumplatte beträgt $d = 0,0005 \text{ m}$, die anderen Aluminiumbleche haben eine unveränderte Dicke von $d = 0,001 \text{ m}$. Die Lagerung erfolgt wie zuvor. Abbildung 6.27 zeigt die Konstruktion der Hinterkante mit poroelastischem Material.

Die Aluminiumstruktur der Hinterkantenkonstruktion wird durch 1000 Mindlin-Platten-Elemente diskretisiert, das poroelastische Material durch 2625 Hexaeder-Volumen-Elemente. Alle Elemente verwenden quadratische Ansatzfunktionen. Für die Simulation werden die freien Flächen des poroelastischen Keils mit den zuvor generierten Strömungsdaten gekoppelt. Eine weitere Belastung der Hinterkantenstruktur erfolgt nicht.

Zur Auswertung wird erneut über die Punkte am Ende der Hinterkante sowie über die vier Stoßpunkte der Rippen mit der Flügelhaut (Kennzeichnung P_{Aw}) gemittelt (siehe Abbildung 6.27).

Im Gegensatz zur Überströmung der Hinterkante aus Aluminiumblechen ergeben sich weitaus größere Auslenkungen, wenn die Hinterkante aus poroelastischem Material ausgebildet

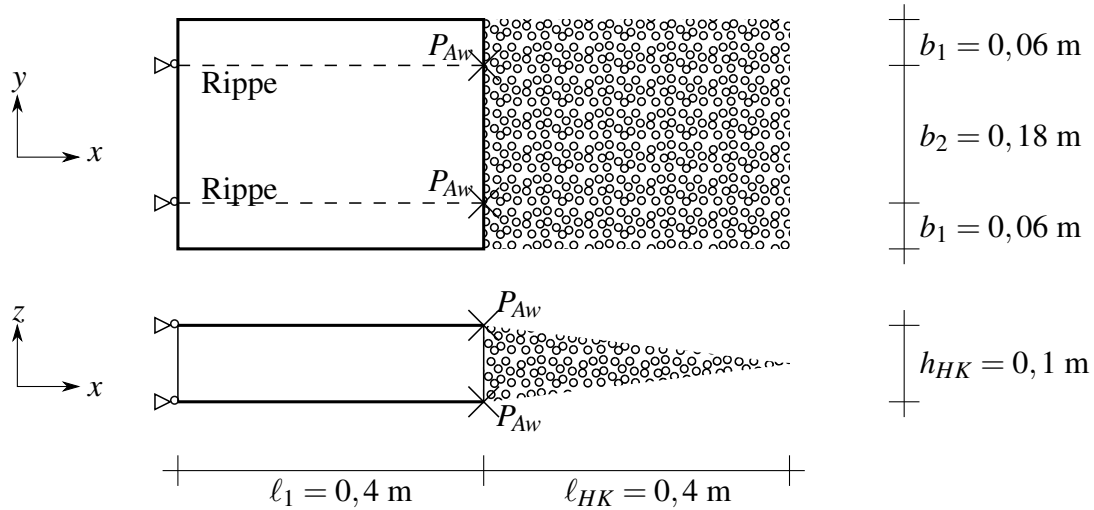


Abbildung 6.27: Geometrie zur Struktursimulation der Beispielhinterkante aus Metall-Schaum mit Kennzeichnung der Auswertepunkte P_{Aw}

ist. Die maximale Auslenkung für den Aluminium-Schaum ergibt sich am Ende der Hinterkante zu $1,95 \cdot 10^{-4}$ m, für den Nickel-Chrom-Schaum zu $2,95 \cdot 10^{-5}$ m. Die Auslenkungen liegen damit vier beziehungsweise drei Größenordnungen über denen der Hinterkante aus Aluminiumblechen. Diese größeren Auslenkungen entsprechen der Erwartung, da die Konstruktion aus poroelastischem Materialien weniger steif als die aus Aluminiumblechen ist.

An den Auswertepunkten ergeben sich maximale Auslenkungen von $9,02 \cdot 10^{-5}$ m für den Aluminium-Schaum und $1,40 \cdot 10^{-5}$ m für den Nickel-Chrom-Schaum. Auch hier ist ein Unterschied von fast vier beziehungsweise drei Größenordnungen festzustellen. Abbildung 6.28 stellt die Ergebnisse als mittlere quadratische Geschwindigkeiten in Dezibel dar. Zum Vergleich sind die Ergebnisse aus der Überströmung der Hinterkante aus Aluminiumblechen ebenfalls angegeben.

Es ist des Weiteren erwartungsgemäß das geänderte Systemverhalten der Hinterkantenkonstruktion mit poroelastischem Material zu erkennen. Dieses zeigt sich durch die geänderte Lage der Peaks und ist abhängig von den Eigenschaften des verwendeten poroelastischen Schaums.

Wie zuvor dominieren auch hier die Auslenkungen in z -Richtung. Abbildung 6.29 zeigt am Beispiel des Aluminium-Schaums auf, dass die Anteile der Geschwindigkeiten in x - und y -Richtung vernachlässigbar klein sind.

Aus dem Vergleich der Ergebnisse der Überströmung einer Hinterkante aus Aluminiumblechen und aus poroelastischem Material gestalteten Hinterkanten ist zu erkennen, dass die poroelastische Ausbildung zu größeren strukturellen Verschiebungen führt. Der positiven aeroakustischen Wirkung von porös gestalteten Hinterkanten stehen somit erhöhte strukturelle Schwingungen entgegen. Bei der Konstruktion der Hinterkante muss eine entsprechende Auslegung erfolgen, um möglichen Strukturschädigungen vorzubeugen.

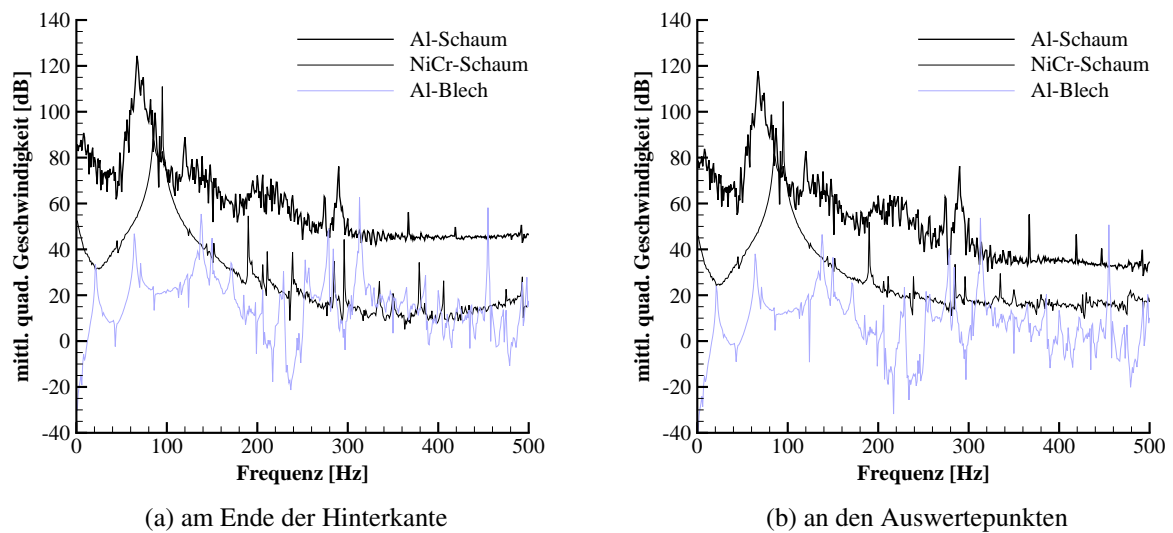


Abbildung 6.28: Mittlere quadratische Geschwindigkeiten bei Anregung durch Überströmung für verschiedene Hinterkantenausbildungen

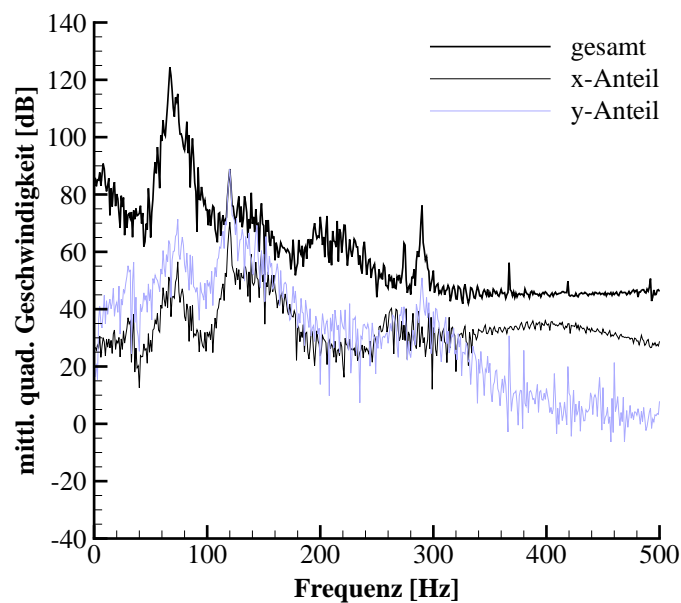


Abbildung 6.29: Anteilige mittlere quadratische Geschwindigkeiten bei Anregung durch Überströmung für eine Hinterkante aus Aluminium-Schaum

Zu prüfen bleibt unter der Berücksichtigung der aeroakustischen Wirkung, ob das Aufbringen eines poroelastischen Liners aus Metall-Schaum auf die Hinterkante hier nicht einen sinnvolleren Ansatz darstellt. Ausgehend von den Erkenntnissen aus Kapitel 6.3 würde eine solche Konfiguration zu einem geringeren Körperschalleintrag und somit zu geringeren strukturellen Auslenkungen führen.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Das vorgestellte Verfahren ermöglicht es, die Einleitung von strömungsinduziertem Körperschall in elastische und poroelastische Strukturen und die Weiterleitung von Körperschall abzubilden. Die einzelnen Komponenten Strömung, poroelastisches Material, elastische Struktur und akustisches Fluid werden mit Hilfe der Finite-Volumen-Methode, der Finite-Elemente-Methode beziehungsweise der Randelementemethode abgebildet. Dieses erlaubt die Ausnutzung der Vorteile des jeweils geeigneten Simulationsverfahrens. Den Interaktionen der einzelnen Komponenten untereinander wird durch die Formulierung von Kopplungsbedingungen Rechnung getragen. Neben der Verwendung von etablierten Kopplungsmechanismen kommt hier eine neue Umsetzung der Interfacebedingungen zwischen Strömung und poroelastischem Material im Rahmen einer Finite-Elemente-Formulierung im Frequenzbereich zur Anwendung.

Die neu aufgestellten Kopplungsbedingungen berücksichtigen die Wechselwirkungen sowohl der Fluid- als auch der Festkörperphase eines poroelastischen Materials mit einer Strömung. Aus den durchgeführten Betrachtungen ist zu erkennen, dass diese Kopplungsbedingungen durch ihre detaillierte Berücksichtigung der relevanten Effekte an der Grenzfläche gegenüber einem üblichen Ansatz, der auf vereinfachten Annahmen beruht, überlegen sind. Es zeigt sich des Weiteren, dass die verwendeten Strömungsdaten den Charakter der überströmten Fläche (geschlossene oder offenporige Oberfläche) bereits berücksichtigen müssen.

Wird poroelastisches Material als sogenannter Liner in einer dünnen Schicht auf eine überströmte Struktur aufgebracht, lassen sich signifikante Reduzierungen des durch Überströmung hervorgerufenen Körperschalls erzielen. Diese werden insbesondere durch Dämpfung der Eigenmoden verursacht. Sind die Eigenmoden durch den Liner bereits deutlich gedämpft, wirkt sich eine weitere Erhöhung der Schichtdicke kaum aus, so dass von der Existenz einer optimalen Dicke des poroelastischen Liners ausgegangen werden kann. Mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens kann sich diese Schichtdicke auf dem Wege der Simulation nachweisen lassen.

Der neu formulierte Kopplungsmechanismus enthält einen aus den zugrundeliegenden Erhaltungsgleichungen stammenden Parameter, der bis dato *a priori* nicht bestimmbar ist, aber dessen Einfluss sich im Rahmen der Studien deutlich zeigen lässt. Es bleibt zu zeigen, wie groß die Sensitivität der neuen Kopplungsbedingungen bei speziellen Problemstellungen gegenüber diesem Parameter ist.

Die neuen Kopplungsbedingungen erlauben, das Zusammenspiel von Strömung und poroelastischem Material abzubilden. Ihre Kombination mit bewährten Simulationsverfahren und etablierten Kopplungsbedingungen führt auf ein Werkzeug, das zur Bestimmung von strömungsinduziertem Körperschalleintrag in Strukturen mit porösen Oberflächen dient und den Körperschall in Strukturen wiedergibt. Das vorgestellte Verfahren kann überall dort zum Einsatz

kommen, wo die Bestimmung der Wirkung einer poroelastischen Schicht auf dem Simulationswege von Interesse ist. Mögliche Einsatzgebiete umfassen beispielsweise raumluftechnische Anlagen, deren Lüftungskanäle mit poroelastischem Material ausgekleidet sind, oder luftführende Leitungen im Kraftfahrzeugbau, die mit einem innenwandigen Liner versehen sind. Im Bereich der Flugzeugentwicklung lassen sich die strukturellen Auswirkungen voraussagen, zum Beispiel für den Fall, dass poröse Schichten an bestimmten Stellen der Außenhaut angeordnet werden.

Insgesamt stellt das aufgezeigte Verfahren durch die Abbildung der Effekte der Interaktion von Strömung und poroelastischem Material einen weiteren Baustein in der Entwicklung numerischer Hilfsmittel zur akustischen Beurteilung dar. Es ermöglicht zukünftig eine noch bessere Beurteilung der akustischen Auswirkungen von Maschinen oder Bauteilen bereits im Entwicklungsprozess, um so dem gewünschten lärmarmen Umfeld ein Stück näher zu kommen.

A Parameter der Biot-Formulierung

Die Parameter P , Q und R der poroelastischen Materialformulierung nach Biot unter Berücksichtigung einer kompressiblen Festkörperphase bestimmen sich zu (siehe [3])

$$P = \frac{(1 - \phi) \left(1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} \right) K_s + \phi \frac{K_s}{K_f} K_b}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}} + \frac{4}{3}N, \quad (\text{A.1})$$

$$Q = \frac{\left(1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} \right) \phi K_s}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}} \quad (\text{A.2})$$

und

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}}. \quad (\text{A.3})$$

Die Porosität wird mit ϕ angegeben. Der Parameter N ist wie zuvor gleichbedeutend mit dem Schubmodul G . K_s stellt den Kompressionsmodul der Festkörperphase dar, K_f den der Fluidphase. K_b bezeichnet den Kompressionsmodul des poroelastischen Materials.

B Verzeichnis der verwendeten Symbole und Abkürzungen

Symbole:

c	Schallgeschwindigkeit [m/s]
c_{eq}	äquivalente Schallgeschwindigkeit [m/s]
d_{char}	charakteristische Länge [m]
f	Frequenz [Hz]
\tilde{g}	spezifische Kraft [N/m ³]
\tilde{g}	Wichtungsfunktion
h	Plattendicke [m]
i	imaginäre Einheit: $i = \sqrt{-1}$
k_S	Schubkorrekturfaktor [-]
n	Normalenrichtung
\mathbf{n}	Normalenvektor
p	Druck; Schalldruck [N/m ²]
p_0	Referenzschalldruck an der Hörschwelle bei 1000 Hz: $2 \cdot 10^{-5}$ N/m ²
q	Schallfluss $q = \partial p / \partial n$ [N/m ³]
t	Zeit [s]
u	Verschiebung [m]
v	Geschwindigkeit (einer Strömung) [m/s]
v_0	Referenzpartikelgeschwindigkeit an der Hörschwelle bei 1000 Hz: $5 \cdot 10^{-8}$ m/s
v_D	Filtergeschwindigkeit nach Darcy [m/s]
\mathbf{v}	Vektor der Schallschnelle [m/s]
x, y, z	Raumrichtungen
A	Fläche [m ²]
B	Biegesteifigkeit $B = EI / (1 - \nu^2)$ [Nm]
\mathbf{C}	Kopplungsmatrix (FEM)
D	Scherrate [1/s]
\mathbf{D}	Matrix der Ableitungsvorschriften (FEM)
E	Elastizitätsmodul [N/m ²]
E_{kin}	kinetische Energie [Nm]

E_{pot}	potentielle Energie [Nm]
\mathbf{E}_p	Elastizitätsmatrix des poroelastischen Materials (FEM)
F	Kraft [N]
G	Schubmodul $G = E/(2(1 + \nu))$ [N/m ²]
\mathbf{G}	Einflussmatrix aus Kollokation (BEM)
\mathbf{H}	Einflussmatrix aus Kollokation (BEM)
K	Permeabilität [m ²]
	Kompressionsmodul [N/m ²]
$K_e(\omega)$	effektiver Kompressionsmodul [N/m ²]
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix (FEM)
I	flächenbezogenes Trägheitsmoment $I = h^3/12$ [m ³]
$\Im(\dots)$	Imaginärteil
L_p	Schalldruckpegel [dB]
L_W	Schallleistungspegel [dB]
Ma	Machzahl [-]
N	Ansatzfunktion
\mathbf{N}	Matrix der Ansatzfunktionen (FEM)
N_e	Anzahl Kontrollvolumina (FVM)
\mathbf{M}	Massenmatrix (FEM)
$\Re(\dots)$	Realteil
Re	Reynoldszahl [-]
P_W	Schallleistung [W] bzw. [Nm/s]
\mathbf{T}	Transformationsmatrix (FEM)
V	Volumen [m ³]
W	Arbeit [Nm]
Z	Impedanz; für Luft $Z_0 = 415 \text{ Ns/m}^3$
α	<i>slip rate coefficient</i> [-] (nach [14])
α_∞	Tortuosität [-]
$\tilde{\alpha}(\omega)$	dynamische Tortuosität [-]
γ	Gleitung, Scherung [-] bzw. [rad]
	Koeffizient [Ns/m ²] (Gl. 4.42 nach [10])
δ_{ij}	Kronecker-Delta: $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$, sonst $\delta_{ij} = 0$
ε	Dehnung, auch als Dehnungstensor [-]
$\dot{\varepsilon}$	Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ [1/s]
η	Verlustfaktor [-]
λ	Wellenlänge $\lambda = c/f$ [m]
κ	Wellenzahl $\kappa = \omega/c = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$ [1/m]
μ	dynamische Viskosität [Ns/m ²]
μ_t	Scheinviskosität [Ns/m ²]
ν	Querdehnzahl [-]
	kinematische Viskosität $\nu = \mu/\rho$ [m ² /s]
ν_t	Wirbelviskosität $\nu_t = \mu_t/\rho$

ρ	Dichte [kg/m ³]
ρ_1	Dichte der Festkörperphase (im Vakuum) im poroelastischen Material [kg/m ³]
$\rho_e(\omega)$	effektive Dichte [kg/m ³]
σ	Spannung, auch als Spannungstensor [N/m ²] Strömungswiderstand [Ns/m ⁴]
τ	Tangential-, Schubspannung [N/m ²] Spannungstensor der effektiven Spannungen in einer Strömung
ϕ	Porosität [-]
φ	Drehwinkel [-] bzw. [rad]
ω	Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ [1/s]
Δ	Änderung Laplace-Operator ($\nabla \cdot \nabla$)
Λ	viskose charakteristische Länge [m]
Λ'	thermale charakteristische Länge [m]
∇	Differentialoperator $(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z})^T$

Häufige Indizes:

c	Zugehörigkeit zu einer Strömungsgröße
f	Zugehörigkeit zur Fluidphase eines poroelastischen Materials
p	Zugehörigkeit zu einem poroelastischen Material
s	Zugehörigkeit zur Festkörperphase eines poroelastischen Materials

Abkürzungen:

BEM	Randelementmethode (engl. <i>boundary element method</i>)
DES	Detached Eddy Simulation
FD	Finite Differenzen
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FV	Finite Volumen
FVM	Finite-Volumen-Methode
LES	Large Eddy Simulation
RANS, RANSE	Reynolds averaged Navier Stokes equations, Reynoldsgleichungen

Konventionen:

$(\dots)_{,i} = \frac{\partial(\dots)}{\partial i}$ partielle Ableitung nach i

Literaturverzeichnis

- [1] Ackermann, L.: *Simulation der Schalltransmission durch Wände*, Vol. 43. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, 2002.
- [2] Alazmi, B.; Vafai, K.: Analysis of Fluid Flow and Heat Transfer Interfacial Conditions between a Porous Medium and a Fluid Layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **44**, 1735–1749, 2001.
- [3] Allard, J. F.; Atalla, N.: *Propagation of Sound in Porous Media*. John Wiley & Sons, Ltd., 2009.
- [4] Antes, H.: *Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluidodynamik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1988.
- [5] Arenas, J. P.: Numerical Computation of the Sound Radiation from a Planar Baffled Vibrating Surface. *Journal of Computational Acoustics*, **16**(3), 321–341, 2008.
- [6] Atalla, N.; Hamdi, M. A.; Panneton, R.: Enhanced Weak Integral Formulation for the Mixed (u,p) Poroelastic Equations. *Journal of the Acoustical Society of America*, **109**(6), 3065–3068, 2001.
- [7] Atalla, N.; Nicolas, J.: A New Tool for Predicting Rapidly and Rigorously the Radiation Efficiency of Plate-Like Structures. *Journal of the Acoustical Society of America*, **95**(6), 3369–3378, 1994.
- [8] Atalla, N.; Nicolas, J.; Gauthier, C.: Acoustic Radiation of an Unbaffled Vibrating Plate with General Elastic Boundary Conditions. *Journal of the Acoustical Society of America*, **99**(3), 1484–1494, 1996.
- [9] Atalla, N.; Panneton, R.; Debergue, P.: A Mixed Displacement-Pressure Formulation for Poroelastic Materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, **104**(3), 1444–1452, 1998.
- [10] Badia, S.; Quaini, A.; Quarteroni, A.: Coupling Biot and Navier-Stokes Equations for Modelling Fluid-Poroelastic Media Interaction. *Journal of Computational Physics*, **228**, 7986–8014, 2009.
- [11] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986.

- [12] Bathe, K.-J.; Wilson, E. L.: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [13] Batifol, C.; Zielinski, T. G.; Galland, M.-A.; Ichchou, M. N.: Hybrid Piezo-poroelastic Sound Package Concept: Numerical/Experimental Validations. In *Proceedings of Active 2006*, Adelaide, Australia, Sixth International Symposium on Active Noise and Vibration Control, 2006.
- [14] Beavers, G. S.; Joseph, D. D.: Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall. *Journal of Fluid Mechanics*, **30**(1), 197–207, 1967.
- [15] Beck, S.; Clasen, D.; Lehmann, L.; Schauer, M.; Wulkau, M.: *ElPaSo Manual*. Institut für Angewandte Mechanik, TU Braunschweig.
- [16] Berry, A.: A New Formulation for the Vibrations and Sound Radiation of Fluid-Loaded Plates with Elastic Boundary Conditions. *Journal of the Acoustical Society of America*, **96**(2), 889–901, 1994.
- [17] Berry, A.; Guyader, J.-L.; Nicolas, J.: A General Formulation for the Sound Radiation from Rectangular, Baffled Plates with Arbitrary Boundary Conditions. *Journal of the Acoustical Society of America*, **88**(6), 2792–2802, 1990.
- [18] Biot, M. A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*, **28**(2), 168–178, 1956.
- [19] Biot, M. A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*, **28**(2), 179–191, 1956.
- [20] Biot, M. A.: Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Dissipative Media. *Journal of the Acoustical Society of America*, **34**(5), 1254–1264, 1962.
- [21] Blake, W. K.: *Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration*. Academic Press, Orlando, Florida, 1986.
- [22] Bluhm, J.; de Boer, R.; Skolnik, J.: *Allgemeine Plastizitätstheorie für poröse Medien*, Vol. 73. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität Gesamthochschule Essen, Essen, 1996.
- [23] Bonnet, M.: *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. John Wiley & Sons, Ltd., 1995.
- [24] Borisyuk, A. O.; Grinchenko, V. T.: Vibration and Noise Generation by Elastic Elements Excited by a Turbulent Flow. *Journal of Sound and Vibration*, **204**(2), 213–237, 1997.
- [25] Brigham, E. O.: *FFT-Anwendungen*. Oldenbourg, 1997.

- [26] Bräunling, W. J. G.: *Flugzeugtriebwerke*. Springer-Verlag, 2009.
- [27] Bull, M. K.: Wall-Pressure Fluctuations Beneath Turbulent Boundary Layers: Some Reflections on Forty Years of Research. *Journal of Sound and Vibration*, **190**(3), 299–315, 1996.
- [28] Champoux, Y.; Allard, J.-F.: Dynamic Tortuosity and Bulk Modulus in Air-Saturated Porous Media. *Journal of Applied Physics*, **70**(4), 1975–1979, 1991.
- [29] Chen, S.; Doolen, G. D.: Lattice-Boltzmann Method for Fluid Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **30**, 329–364, 1998.
- [30] Cieszko, M.; Kubik, J.: Derivation of Matching Conditions at the Contact Surface Between Fluid-Saturated Porous Solid and Bulk Fluid. *Transport in Porous Media*, **34**, 319–336, 1999.
- [31] Ciskowski, R. D.; Brebbia, C. A.: *Boundary Elements in Acoustics*. Computational Mechanics Publications with Elsevier Applied Science, Southampton, Boston, London, New York, 1991.
- [32] Clark, R. L.; Frampton, K. D.: Aeroelastic Structural Acoustic Coupling: Implications on the Control of Turbulent Boundary-Layer Noise Transmission. *Journal of the Acoustical Society of America*, **102**(3), 1639–1647, 1997.
- [33] Clasen, D.: *Numerische Untersuchung der akustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen*, Vol. 64. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, 2008.
- [34] Collery, O.; Guyader, J.-L.: A Formulation Based on Modal Optimization for Predicting Sound Radiation from Fluid-Loaded Aircraft Structures. In *Proceedings of Acoustics 08 Paris*, 3771–3775, 2008.
- [35] Collery, O.; Guyader, J.-L.: Solving the Vibroacoustic Equations of Plates by Minimization of Error on a Sample of Observation Points. *Journal of the Acoustical Society of America*, **127**(3), 1347–1356, 2010.
- [36] Corcos, G. M.: Resolution of Pressure in Turbulence. *Journal of the Acoustical Society of America*, **35**(2), 192–199, 1963.
- [37] Corcos, G. M.: The Structure of the Turbulent Pressure Field in Boundary-Layer Flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **18**(3), 353–378, 1964.
- [38] Cremer, L.; Heckl, M.: *Körperschall*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [39] Davidsson, P.: *Structure-Acoustic Analysis; Finite Element Modelling and Reduction Methods, Doctoral Thesis*. Structural Mechanics, Lund University, Lund, Sweden, 2004.
- [40] de Boer, R.: *Theory of Porous Media*. Springer-Verlag, 2000.

- [41] Debergue, P.; Panneton, R.; Atalla, N.: Boundary Conditions for the Weak Formulation of the Mixed (u,p) Poroelasticity Problem. *Journal of the Acoustical Society of America*, **106**(5), 2383–2390, 1999.
- [42] Deutsche Gesellschaft für Akustik e. V.: Akustische Wellen und Felder, DEGA-Empfehlung 101. Berlin, 2006.
- [43] DIN Deutsches Institut für Normung: Akustik – Bestimmung der Schallleistungs- und Schallenergiepegel von Geräuschquellen aus Schalldruckmessungen – Hüllflächenverfahren der Genauigkeitsklasse 2 für ein im Wesentlichen freies Schallfeld über einer reflektierenden Ebene. DIN EN ISO 3744:2011-02.
- [44] Discacciati, M.; Miglio, E.; Quarteroni, A.: Mathematical and Numerical Models for Coupling Surface and Groundwater Flows. *Applied Numerical Mathematics*, **43**, 57–74, 2002.
- [45] Dobrzynski, W.; Ewert, R.; Pott-Pollenske, M.; Herr, M.; Delfs, J.: Research at DLR towards Airframe Noise Prediction and Reduction. *Aerospace Science and Technology*, **12**, 80–90, 2008.
- [46] Dominguez, J.: *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications and Elsevier, 1993.
- [47] Dominguez, J.; Abascal, R.: Dynamics of Foundations. In *Topics in Boundary Element Research*, Vol. 4, Springer-Verlag, 1987.
- [48] Dupont, T.; Leclaire, P.; Sicot, O.; Gong, X. L.; Panneton, R.: Acoustic Properties of Air-saturated Porous Material containing Dead-end Porosity. *Journal of Applied Physics*, **110**(9), 094903/13, 2011.
- [49] Durant, C.; Robert, G.; Filippi, P. J. T.; Mattei, P.-O.: Vibroacoustic Response of a Thin Cylindrical Shell Excited by a Turbulent Internal Flow: Comparison between Numerical Prediction and Experimentation. *Journal of Sound and Vibration*, **229**(5), 1115–1155, 2000.
- [50] Ehlers, W.: *Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*, Vol. 47. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität Gesamthochschule Essen, Essen, 1989.
- [51] Ehlers, W.; Kubik, J.: On Finite Dynamic Equations for Fluid-saturated Porous Media. *Acta Mechanica*, **105**, 101–117, 1994.
- [52] Etchessahar, M.; Sahraoui, S.; Brouard, B.: Vibrations of Poroelastic Plates: Mixed Displacement-Pressure Modelisation and Experiments. *Acta Acustica united with Acustica*, **95**, 857–865, 2009.
- [53] Ferziger, J. H.; Perić, M.: *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag, 2008.

- [54] Filippi, P.: *Theoretical Acoustics and Numerical Techniques*. Springer Verlag, Wien, New York, 1983.
- [55] Filippi, P. J. T.; Mattei, P.-O.; Maury, C.; van der Burgh, A. H. P.; de Jong, C. J. M.: Sound Transmission Through a Thin Baffled Plate: Validation of a Light Fluid Approximation with Numerical and Experimental Results. *Journal of Sound and Vibration*, **229**(5), 1157–1169, 2000.
- [56] FLUGS-Fachinformationsdienst: Lärm: Krach, der uns krank macht. Helmholtz Zentrum München, 2007.
- [57] Frampton, K. D.: The Effect of Flow-Induced Coupling on Sound Radiation from Convected Fluid Loaded Plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, **117**(3), 1129–1137, 2005.
- [58] Frigo, M.; Johnson, S. G.: The Design and Implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE*, **93**(2), 216–231, 2005. Special Issue on “Program Generation, Optimization, and Platform Adaptation”.
- [59] Fritze, D.; Marburg, S.; Hardtke, H.-J.: Estimation of Radiated Sound Power: A Case Study on Common Approximation Methods. *Acta Acustica united with Acustica*, **95**, 833–842, 2009.
- [60] Förssching, H. W.: *Grundlagen der Aeroelastik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.
- [61] Fuchs, H. V.: *Schallabsorber und Schalldämpfer*. Springer-Verlag, 2010.
- [62] Gaul, L.; Wenzel, W.: A Coupled Symmetric FE-BE Method for Acoustic Fluid-Structure Interaction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**, 629–636, 2002.
- [63] Gerstenberger, A.; Wall, W. A.: An eXtended Finite Element Method/Lagrange Multiplier based Approach for Fluid-Structure Interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**, 1699–1714, 2008.
- [64] Graham, W. R.: Boundary Layer Induced Noise in Aircraft, Part I: The Flat Plate Model. *Journal of Sound and Vibration*, **192**(1), 101–120, 1996.
- [65] Göransson, P.: A 3-D, Symmetric, Finite Element Formulation of the Biot Equations with Application to Acoustic Wave Propagation through an Elastic Porous Medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 167–192, 1998.
- [66] Hambric, S. A.; Hwang, Y. F.; Bonness, W. K.: Vibration of Plates with Clamped and Free Edges Excited by Low-Speed Turbulent Boundary Layer Flow. *Journal of Fluids and Structures*, **19**, 93–110, 2004.

- [67] Han, F.; Bernhard, R. J.; Mongeau, L. G.: Prediction of Flow-Induced Structural Vibration and Sound Radiation Using Energy Flow Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, **227**(4), 685–709, 1999.
- [68] Han, F.; Mongeau, L. G.; Bernhard, R. J.: A Model for the Vibro-Acoustic Response of Plates Excited by Complex Flows. *Journal of Sound and Vibration*, **246**(5), 901–926, 2001.
- [69] Harari, I.; Barbone, P. E.; Montgomery, J. M.: Finite Element Formulations for Exterior Problems: Application to Hybrid Methods, Non-reflecting Boundary Conditions and Infinite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 2791–2805, 1997.
- [70] Harari, I.; Barbone, P. E.; Slavutin, M.; Shalom, R.: Boundary Infinite Elements for the Helmholtz Equation in Exterior Domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 1105–1131, 1998.
- [71] Heckl, M.: Schallabstrahlung von Platten bei punktförmiger Anregung. *Acustica*, **9**, 371–380, 1959.
- [72] Helmig, R.: *Einführung in die Numerischen Methoden der Hydromechanik*, Vol. 86. Institut für Wasserbau der Universität Stuttgart, 1996.
- [73] Herr, M.: Hinterkantenlärm – Entwurfsgrundlagen für Minderungskonzepte. In *Fortschritte der Akustik – DAGA 2006*, 351–352, 2006.
- [74] Hörlin, N.-E.: 3-D Hierarchical *hp*-FEM applied to Elasto-acoustic Modelling of Layered Porous Media. *Journal of Sound and Vibration*, **285**, 341–363, 2005.
- [75] Ibrahimbegovic, A.; Taylor, R. L.; Wilson, E. L.: A Robust Quadrilateral Membrane Finite Element with Drilling Degrees of Freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**, 445–457, 1990.
- [76] Jäger, W.: On the Interface Boundary Conditions of Beavers, Joseph and Saffman. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **60**(4), 1111–1127, 2000.
- [77] Jäger, W.; Mikelić, A.: On the Boundary Conditions at the Contact Interface between a Porous Medium and a Free Fluid. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série*, **23**(3), 403–465, 1996.
- [78] Jäger, W.; Mikelić, A.; Neuss, N.: Asymptotic Analysis of the Laminar Viscous Flow over a Porous Bed. *SIAM Journal of Scientific Computation*, **22**(6), 2006–2028, 2001.
- [79] Johnson, D. L.; Koplik, J.; Dashen, R.: Theory of Dynamic Permeability and Tortuosity in Fluid-saturated Porous Media. *Journal of Fluid Mechanics*, **176**, 379–402, 1987.

- [80] Klein, P.: *Zur Beschreibung der dynamischen Wechselwirkung von Fundamentstrukturen mit dem viskoelastischen Baugrund durch dreidimensionale Randelementformulierungen*. Diss., Universität der Bundeswehr Hamburg, 1989.
- [81] Küttler, U.; Wall, W. A.: Fixed-point Fluid-Structure Interactions Solvers with Dynamic Relaxation. *Computational Mechanics*, **43**, 61–72, 2008.
- [82] Kung, S.-W.; Singh, R.: Complex Eigensolutions of Rectangular Plates with Damping Patches. *Journal of Sound and Vibration*, **216**(1), 1–28, 1998.
- [83] Kuttruff, H.: *Room Acoustics*. Spon Press, 2009.
- [84] Kythe, P. K.: *An Introduction to Boundary Element Methods*. CRC Press, Inc., 1995.
- [85] Langer, S.: *Schalltransmission durch Isolierverglasung*, Vol. 41. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, 2001.
- [86] Laptev, V.: *Numerical Solution of Coupled Flow in Plain and Porous Media*. Diss., Universität Kaiserslautern, 2005.
- [87] Laulagnet, B.: Sound Radiation by a Simple Supported Unbaffled Plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, **103**(5), 2451–2462, 1998.
- [88] Laurien, E.; Oertel Jr., H.: *Numerische Strömungsmechanik*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011.
- [89] Lautensack, C.; Kabel, M.: Modelling and Simulation of Acoustic Absorption of Open Cell Metal Foams. In *Cellular Metals for Structural and Functional Applications, Proceedings of Cellmet 2008*, 271–276, 2009.
- [90] Layton, W. J.; Schieweck, F.; Yotov, I.: *Coupling Fluid Flow with Porous Media Flow*. Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2001.
- [91] Lecheler, S.: *Numerische Strömungsberechnung*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [92] Lee, J.-H.; Ih, J.-G.: Significance of Resonant Sound Transmission in Finite Single Partitions. *Journal of Sound and Vibration*, **277**, 881–893, 2004.
- [93] Levy, T.; Sanchez-Palencia, E.: On Boundary Conditions for Fluid Flow in Porous Media. *International Journal of Engineering Science*, **13**, 923–940, 1975.
- [94] Li, W. L.; Wu, T. W.; Seybert, A. F.: A Half-Space Boundary Element Method for Acoustic Problems with a Reflecting Plane of Arbitrary Impedance. *Journal of Sound and Vibration*, **171**(2), 173–184, 1994.
- [95] Link, G.; Kaltenbacher, M.; Breuer, M.; Döllinger, M.: A 2D Finite-Element Scheme for Fluid-Solid-Acoustics Interactions and its Application to Human Phonation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198**, 3321–3334, 2009.

- [96] Lyon, R. H.; DeJong, R. G.: *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*. Butterworth-Heinemann, 1995.
- [97] Maury, C.; Gardonio, P.; Elliot, S. J.: A Wavenumber Approach to Modelling the Response of a Randomly Excited Panel, Part I: General Theory. *Journal of Sound and Vibration*, **252**(1), 83–113, 2002.
- [98] Miloudi, A.; Hamzaoui, N.; Guyader, J. L.: Influence de la Variation d'Epaisseur sur le Rayonnement Acoustique des Plaques. *Acta Acustica united with Acustica*, **85**, 213–220, 1999.
- [99] Mok, D. P.: *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Diss., Universität Stuttgart, 2001.
- [100] Muntz, S.: *Fluid Structure Interaction for Fluid Flow Normal to Deformable Porous Media*. Diss., Universität Kaiserslautern, 2008.
- [101] Nagler, L.; Schanz, M.: An Extendable Poroelastic Plate Formulation in Dynamics. *Archive of Applied Mechanics*, **80**, 1177–1195, 2010.
- [102] Neale, G.; Nader, W.: Practical Significance of Brinkman's Extension of Darcy's Law: Coupled Parallel Flows within a Channel and a Bounding Porous Medium. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, **52**, 475–478, 1974.
- [103] Nelisse, H.; Beslin, O.; Nicolas, J.: A Generalized Approach for the Acoustic Radiation from a Baffled or Unbaffled Plate with Arbitrary Boundary Conditions, Immersed in a Light or Heavy Fluid. *Journal of Sound and Vibration*, **211**(2), 207–225, 1998.
- [104] Panneton, R.; Atalla, N.: Numerical Prediction of Sound Transmission through Finite Multilayer Systems with Poroelastic Materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, **100**(1), 346–354, 1996.
- [105] Panneton, R.; Atalla, N.: An Efficient Finite Element Scheme for Solving the Three-dimensional Poroelastic Problem in Acoustics. *Journal of the Acoustical Society of America*, **101**(6), 3287–3298, 1997.
- [106] Park, J.; Mongeau, L.; Siegmund, T.: An Investigation of the Flow-Induced Sound and Vibration of Viscoelastically Supported Rectangular Plates: Experiments and Model Verification. *Journal of Sound and Vibration*, **275**, 249–265, 2004.
- [107] Park, J.; Siegmund, T.; Mongeau, L.: Analysis of the Flow-Induced Vibrations of Viscoelastically Supported Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, **261**, 225–245, 2003.
- [108] Rabenseifner, Rolf: *Introduction to Computational Fluid Dynamics. Parallel Programming Workshop, Sixty-fourth Edition, Vol. VIII*, 2009.

- [109] RECEMAT International B. V.: <http://www.recemat.com/en/materials.html>.
- [110] Saffman, P. G.: On the Boundary Conditions at the Surface of a Porous Medium. *Studies in Applied Mechanics*, **L**(2), 93–101, 1971.
- [111] Samuka, T.; Oshima, T.: Application of a Vibro-Acoustic Method to Prediction of Sound Insulation Performance of Building Elements. In *Proceedings of Inter Noise 2001*, 2001.
- [112] Sanchez-Palencia, E.: *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 127. Springer-Verlag, 1980.
- [113] Schanz, M.: *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: a Boundary Element Approach*. Springer-Verlag, 2001.
- [114] Schanz, M.; Diebels, S.: A Comparative Study of Biot's Theory and the Linear Theory of Porous Media for Wave Propagation Problems. *Acta Mechanica*, **161**, 213–235, 2003.
- [115] Schäfer, F.; Müller, S.; Uffinger, T.; Becker, S.; Grabinger, J.; Kaltenbacher, M.: Fluid-Structure-Acoustics Interaction on the Flow past a Thin Flexible Structure. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **48**(4), 738–748, 2010.
- [116] Schäfer, F.; Uffinger, T.; Becker, S.; Grabinger, J.; Kaltenbacher, M.: Fluid-Structure Interaction and Computational Aeroacoustics of the Flow Past a Thin Flexible Structure. In *Proceedings of Acoustics 08 Paris*, 3753–3758, 2008.
- [117] Schlichting, H.; Gersten, K.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [118] Schwarz, H. R.: *Methode der finiten Elemente*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1980.
- [119] Sewell, E. C.: Transmission of Reverberant Sound Through a Single-Leaf Partition Surrounded by an Infinite Rigid Baffle. *Journal of Sound and Vibration*, **12**(1), 21–32, 1970.
- [120] Showalter, R. E.: Poroelastic Filtration Coupled to Stokes Flow. In *Control Theory of Partial Differential Equations: Conference on Control Theory*, Boca Raton, Chapman & Hall, 229–241, 2005.
- [121] Siefert, M.; Ewert, R.; Unruh, O.; Heintze, O.: A Synthetic Wall Pressure Model for the Efficient Simulation of Boundary Layer Induced Cabin Noise. In *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference Proceedings*, AIAA 2010–3760, 2010.
- [122] Sigloch, H.: *Technische Fluidmechanik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [123] Steindorf, J.: *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung*. Diss., Technische Universität Braunschweig, 2002.
- [124] Strawdermann, W. A.; Christman, R. A.: Turbulence-Induced Plate Vibrations: Some Effects of Fluid Loading on Finite and Infinite Plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, **52**(5.2), 1537–1552, 1972.

- [125] Tröndle, G.: *Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode*, Vol. 21. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, 1995.
- [126] von Estorff, O.: *Boundary Elements in Acoustics, Advances and Applications*. WIT Press, Southampton, 2000.
- [127] von Estorff, O.; Antes, H.: On FEM-BEM Coupling for Fluid-Structure Interaction Analyses in the Time Domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, 1151–1168, 1991.
- [128] Vorländer, M.: Ein Strahlverfolgungsverfahren zur Berechnung von Schallfeldern in Räumen. *Acustica*, **65**(3), 138–148, 1988.
- [129] Wall, W. A.: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Diss., Universität Stuttgart, 1999.
- [130] Willmarth, W. W.: Pressure Fluctuations Beneath Turbulent Boundary Layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **7**, 13–38, 1975.
- [131] Wrobel, L. C.; Aliabadi, F.: *The Boundary Element Method, Volume 1: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. John Wiley & Sons, Ltd., 2002.
- [132] Zienkiewicz, O. C.: *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, 1971.
- [133] Zienkiewicz, O. C.; Shiomi, T.: Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media; the Generalized Biot Formulation and its Numerical Solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **8**, 71–96, 1984.
- [134] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

Braunschweiger Schriften zur Mechanik – BSM

Bisher erschienene Berichte in dieser Reihe

- 1–1990 Plonski, Thomas:
Dynamische Analyse von schnelldrehenden Kreiszylinderschalen
- 2–1991 Wegener, Konrad:
Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Über-
spannungstyp
- 3–1992 Gröhlich, Hubert:
Finite-Element-Formulierung für vereinheitlichte inelastische Werkstoffmodelle oh-
ne explizite Fliessflächenformulierung
- 4–1992 Hesselbarth, Hanfried:
Simulation von Versetzungsstrukturbildung, Rekristallisation und Kriechschädigung
mit dem Prinzip der zellulären Automaten
- 5–1992 Schlums, Hartmut:
Ein stochastisches Werkstoffmodell zur Beschreibung von Kriechen und zyklischem
Verhalten metallischer Werkstoffe
- 6–1992 Kublik, Frithjof:
Vergleich zweier Werkstoffmodelle bei ein- und mehrachsigen Versuchsführungen
im Hochtemperaturbereich
- 7–1992 Bechtloff, Jürgen:
Interpolationsverfahren höheren Grades für Robotersteuerungen
- 8–1993 Müller, Michael:
Dreidimensionale elastodynamische Analyse von Tanks mit fluidbenetzten Einbau-
ten
- 9–1993 Senker, Peter:
Stabilitätsanalyse elastischer Rotorsysteme
- 10–1993 Cheng, Weimin:
Schallabstrahlung einer schwingenden Reisner/Mindlin Platte
- 11–1993 Wiebe, Thomas:
Wellenausbreitung in poroelastischen Medien: Untersuchung mit Randintegralglei-
chungen
- 12–1993 Hahne, Matthias:
Beschreibung der plastischen Längsdehnung bei Torsion mit einem makroskopischen
Stoffgesetz

- 13–1993 Heisig, Gerald:
Zum statischen und dynamischen Verhalten von Tiefbohrsträngen in räumlich gekrümmten Bohrlöchern
- 14–1994 de Araújo, Francisco Célio:
Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE-Methode
- 15–1994 Kristen, Martin:
Untersuchungen zur elektrischen Ansteuerung von Formgedächtnis-Antrieben in der Handhabungstechnik
- 16–1994 Latz, Kersten:
Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern und Baugrund
- 17–1994 Jäger, Monika:
Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen
- 18–1994 August, Martin:
Schwingungen und Stabilität eines elastischen Rades, das auf einer nachgiebigen Schiene rollt
- 19–1995 Erbe, Matthias:
Zur Simulation von Risswachstum in dreidimensionalen, elastisch-plastischen Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente
- 20–1995 Gerdes, Ralf:
Ein stochastisches Werkstoffmodell für das inelastische Materialverhalten metallischer Werkstoffe im Hoch- und Tieftemperaturbereich
- 21–1995 Tröndle, Georg:
Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode
- 22–1996 Degenhardt, Richard:
Nichtlineare dynamische Bauwerksprobleme und Interaktion mit dem Baugrund
- 23–1996 Feise, Hermann Josef:
Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern
- 24–1996 Haubrok, Dietmar:
Reibungsfreie Kontaktprobleme der 2-D Elastostatik und -dynamik als Optimierungsaufgabe mit REM-Matrizen
- 25–1996 Lehmann, Lutz:
Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten

- 26–1996 Klein, Ralf:
Dynamische Interaktion von dünnwandigen Tragwerken und Boden mit Abschirmschlitzten
- 27–1996 Kopp, Thilo:
Simulation grosser inelastischer Deformationen bei Torsionsversuchen
- 28–1997 Harder, Jörn:
Simulation lokaler Fließvorgänge in Polykristallen
- 29–1997 Lewerenz, Malte Christian:
Zur numerischen Behandlung von Werkstoffmodellen für zeitabhängig plastisches Materialverhalten
- 30–1997 Meywerk, Martin:
Stabilität und Verschleiß bei auf Schienen laufenden Eisenbahnwheelsätzen
- 31–1997 Plagge, Frank:
Nichtlineares, inelastisches Verhalten von Spiralseilen
- 32–1997 Neubert, Michael:
Richtungsregelung beim Tiefbohren
- 33–1998 Sangi, Daryoush:
Die Versetzungsstrukturbildung in Metallen
- 34–1998 Thielecke, Frank:
Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen – Theorie, Numerik, Anwendung
- 35–1998 Vietgen, Jürgen:
Numerische Simulation duktilen Risswachstums unter Berücksichtigung von Schädigung
- 36–1998 Lär, Bernard:
Einfluss transientsrer Anregungen auf die Zylinderkopf-Akustik
- 37–1998 Scheld, Christian:
Auswirkungen dynamischer Interaktionen auf das Schwingungsverhalten von Tanks
- 38–1999 Baaran, Jens:
Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern
- 39–1999 Daros, Carlos:
Wellenausbreitung in unendlich ausgedehnten piezoelektrischen Medien mit transversal isotroper Symmetrie

- 40–2000 Nils, Wagner:
Untersuchung der Boden-Fahrzeug-Interaktion mit gekoppelten Rand- und Finite-Element-Methoden
- 41–2001 Langer, Sabine:
Schalltransmission durch Isolierverglasung
- 42–2001 Schacht, T.:
Orientierungsabhängige Rissbildung in duktilen Metallen
- 43–2002 Ackerman, Lutz:
Simulation der Schalltransmission durch Wände
- 44–2002 Barthold, Franz-Joseph:
Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrie Probleme
- 45–2002 Böhrnsen, Jens-Uwe:
Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren aus Silos
- 46–2002 Zorn, C.:
Plastisch instabile Verformung aufgrund dynamischer Reckalterung und korrelierten Versetzungsgleitens
- 47–2002 Küsel, M.:
Wellige Verschleißmuster auf Laufflächen von Eisenbahnradern
- 48–2002 Bross, S.:
Versetzungsdynamik und Reckalterung als Ursache instabilen Materialverhaltens beim Portevin-Le Chatelier-Effekt
- 49–2002 Vesper, Matthias:
Modellierung von Korn und Korngrenze in polykristallinen Gefügen
- 50–2003 Steindorf, Jan:
Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur-Wechselwirkung
- 51–2003 Meyer, Marcus:
Reduktionsmethoden zur Simulation des aeroelastischen Verhaltens von Windkraftanlagen
- 52–2003 Wittich, Hauke:
Inhomogene Gleitung bei nahgeordneten CuAl-Legierungen
- 53–2003 Hupfer, Knut:
Einfluss der Mikrostruktur auf die Festigkeitseigenschaften von Metallschäumen

- 54–2004 Schmelzer, Martin:
Identifikation der Parameter von Zeitbereichsmodellen linear-viskoelastischer Werkstoffe
- 55–2004 Ostendorf, Michael:
Geschwindigkeitsmessungen in Silos mit der Particle Image Velocimetry
- 56–2004 Engelhardt, Marek:
Numerische Verfahren zur Identifizierung von Fehlstellen aus Randdaten
- 57–2005 Keese, Andreas:
Numerische Lösung von Systemen mit stochastischen Unsicherheiten – Ein allgemeiner Rahmen für Stochastische Finite Elemente
- 58–2005 Pryl, Dobromil:
Einfluss der Poroelastizität auf die Wellenausbreitung: Eine zeitabhängige Randelementformulierung
- 59–2005 Fries, Thomas-Peter:
Ein stabilisiertes und gekoppeltes netzfreies/netzbasiertes Verfahren für Fluid-Struktur- Interaktionsprobleme
- 60–2006 Kayser-Herold, Oliver:
Least-Squares Methoden zur Lösung von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen
- 61–2006 Hampel, Sebastian:
Numerische Simulation der Schallausbreitung unter Berücksichtigung meteorologischer Einflüsse
- 62–2007 Struckmeier, Vera:
Ein numerisches Modell für seismisch induzierte Bodenverflüssigung
- 63–2008 Borsutzky, Robert:
Seismische Risikoanalyse unterirdischer Versorgungsleitungen
- 64–2008 Clasen, Dirk:
Numerische Untersuchung der akustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen
- 65–2010 Böhrnsen, Jens-Uwe:
Neue Weitsicht – Neue Weitsicht, Physik und Ingenieure heute